ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2018, решения

1. Докажите, что для любых $m \in \mathbb{N}$ существует действительная $m \times m$-матрица A такая, что $A^3 = A + E$, где E — единичная матрица.

   $\lhd$ Диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ удовлетворяет равенству $A^3 = A + E$ тогда и только тогда, когда $\lambda^3 = \lambda + 1$. Это уравнение имеет действительный корень. $\rhd$

2. Пусть F — семейство конечных подмножеств $\mathbb{N}$ такое, что $A \bigcap B \neq \emptyset$ для любых $A, B \in F$. Верно ли тогда, что существует конечное множество $Y \subseteq \mathbb{N}$, для которого $A \bigcap B \bigcap Y \neq \emptyset$ для любых $A, B \in F$?

   $\lhd$ Нет. Возьмем $F = \{A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots\}$, где $A_n = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2n\}$, $B_n = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, 2n+1\}$. $\rhd$

3. Пусть интервал (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$, таков, что существует функция f, дифференцируемая на (a, b), для которой $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$ и $f'(x) + (f(x))^2 \geq -1$ для любого $x \in (a, b)$. Докажите, что $\pi \leq b - a$.

   $\lhd$ Положим $g(x) := x + \operatorname{arctg} f(x)$. Тогда $g'(x) = 1 + \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \geq 0$ для любого $x \in (a, b)$. Поэтому
   $$\frac{\pi}{2} + a = \lim_{x \to a+0} g(x) \leq \lim_{x \to b-0} g(x) = -\frac{\pi}{2} + b$$
   и $\pi \leq b - a$. $\rhd$

4. Докажите, что любого $m \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n2018^m - 2020$ делится на 2019.

   $\lhd$ **1 способ**. Если m нечетно, то
   $$2018 \cdot 2018^m - 2020 = 2019 \cdot 2018^m -$$
   $$-2018^m - 1 - 2019 = 2019(2018^m - 1) -$$
   $$-(2018 + 1)(2018^{m-1} + \ldots + 1)$$
   делится на 2019. Если m четно, то
   $$2018^m - 2020 = (2019 - 1)^m - 2020 = \sum_{k=1}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} 2019^k + 1 - 2020$$
   делится на 2019.

   2 способ. Так как числа 2018^m и 2019 взаимно простые, то существуют целые u и v такие, что $u2018^m + v2019 = 1$. Тогда $2019 \,|\, (u2018^m - 2020)$. Найдется $s \in \mathbb{N}$, для которого $n = u + 2019s \in \mathbb{N}$. При этом $2019 \,|\, (n2018^m - 2020)$. $\rhd$

5. Пусть $0 < a < b$. Докажите, что
   $$\int_a^b (x^2 + 1) e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

   $\lhd$
   $$\int_a^b (x^2 + 1) e^{-x^2} dx \geq \int_a^b 2x e^{-x^2} dx = \left(-e^{-x^2}\right)\Big|_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$
   $\rhd$