ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2014

15 апреля 2014 г.

1. Задана непрерывная функция $f : [0,1] \to (0;+\infty)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, рассматриваем такое разбиение $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ отрезка $[0,1]$, что
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \cdots = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt.$$
Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(t_k)}}$.

2. Пусть дважды дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f''(x) + xe^x f'(x) + f(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция f является ограниченной.

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{arcctg}(\sin 5x) + \operatorname{arctg}(\cos 2x)$.

4. Найдите все функции f, удовлетворяющие уравнению $x(1 - f(x)) - f(1 - x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

5. Докажите, что многочлен
$$Q(x) = x^{2014} - x^{2013} - 2x^{2012} - \cdots - 2012x^2 - 2013x - 2014$$
имеет единственный положительный корень.

6. Найдите наименьшее $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что
$$\lambda \int\limits_0^1 (f(x)^2 + g(x)^2)dx \geq \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$$
для всех непрерывных на $[0,1]$ функций f и g.

7. На плоскости задано 2014 различных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует простая (т.е. без точек самопересечения) замкнутая ломаная с вершинами в этих точках.

8. Пусть $A = (a_{i,j})$ — невырожденная квадратная матрица порядка n, $a_{i,j} > 0$, $\forall i, \forall j$. Докажите, что $z_n \leq n^2 - 2n$, где z_n — число нулевых элементов в матрице A^{-1}.

9. Найдите предел (здесь C_n^k обозначает число сочетаний из n по k)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k} \right)^n.$$

10. Для $s = 2$ и $s = 2014$ решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X^s = X^s \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$