

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2013

для студентов 1 и 2 курсов

16 апреля 2013 г.

1. Пусть $C[0, 1]$ — множество непрерывных на $[0, 1]$ функций f , $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$; n — некоторое натуральное число. Определите наименьшее значение постоянной c такой, что

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \leq c \int_0^1 f(x) dx$$

для любой функции $f \in C[0, 1]$.

2. Пусть a — положительное действительное число, отличное от 1. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a - 1)} \right)^{1/x}.$$

3. Докажите, что уравнение относительно функции u

$$u(x) = 1 + \lambda \int_x^1 u(y)u(y - x) dy$$

при $\lambda > 1/2$ не имеет действительных решений, заданных на отрезке $[0, 1]$.

4. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Докажите, что

- среди векторов нет ни одной пары коллинеарных;
- вычислите значение выражения: $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

5. Найдите n из уравнения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+3x) \dots (1+(2n+1)x) - 1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx} = \frac{7}{3}.$$

6. Строку матрицы назовем перестановочной, если любая перестановка элементов строки не меняет величины определителя матрицы. Докажите, что матрица с двумя перестановочными строками является вырожденной.

7. Дифференцируемые функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют равенствам:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

при всех x и y . Найдите множество значений функции $f^2 + g^2$ при условии, что $f'(0) = 0$.

8. Вектор \vec{a} единичной длины выходит из начала координат в верхнюю полуплоскость и образует угол φ с осью Ox . Повернув \vec{a} вокруг начала координат на угол φ , получим вектор \vec{b} , а на угол 2φ — вектор \vec{c} . Вычислив вектор $\vec{c} + \frac{13}{5}(\vec{a} - \vec{b})$, получим вектор $(1; 0)$. Найдите \vec{a} .