

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2012

16 апреля 2012 г.

1. Вычислите

$$\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{e^{\cos^2 x} + \sin^2 x}) dx.$$

2. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

3. Пусть функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и

$$x \sin f(x) + x^2 = f(x) \sin x + 2(f(x))^2$$

для любого $x \in [0, 1]$. Найдите $|f'(0)|$.

4. Докажите, что если функция f при всех действительных x и y удовлетворяет неравенствам

$$f(x) \leq x, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

то $f(x) = x$.

5. Докажите, что в обычном трехмерном пространстве нельзя выбрать более четырех векторов, все углы между которыми тупые.

6. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM . Докажите, что площадь треугольника ABC в два раза больше площади треугольника KLM .

7. Является ли вырожденной (невыврожденной) матрица порядка 2011

$$\begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{2009} & 2012 & 2011 \\ 2^{2010} & 2^{2011} & 2^{2012} & \dots & 2010 & 2011 & 2010 \\ 2^{4018} & 2^{4019} & 2^{4020} & \dots & 2011 & 2012 & 3^{2019045} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{2019045} & 2012 & 2011 & \dots & 3^{4020} & 3^{4019} & 3^{4018} \\ 2010 & 2011 & 2010 & \dots & 3^{2012} & 3^{2011} & 3^{2010} \\ 2011 & 2012 & 3^{2009} & \dots & 3^3 & 3^2 & 3^1 \end{pmatrix} ?$$

8. Решить матричное уравнение

$$X^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X - \text{ вещественная матрица второго порядка.}$$

9. По гиперболе $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, по вогнутой стороне (верхней) катится окружность радиуса 1. Найдите уравнение линии, по которой движется центр данной окружности.

10. Пусть для многочлена $f(x) = x^{n-1} + f_1x^{n-2} + \dots + f_{n-2}x + f_{n-1}$ число a_i является корнем уравнения $f(x) = i$, $i = 1, \dots, n$. Докажите, что

$$\sum_{j=1}^n \frac{j}{\prod_{i \neq j} (a_i - a_j)} = (-1)^{n-1}.$$