1. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где n - натуральное число?

2. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1; x_2]$, причем $0 < x_1 < x_2$. Доказать, что $\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\varsigma) - \varsigma f'(\varsigma)$, где $\varsigma \in (x_1, x_2)$.

4. Доказать, что $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, причем $f(f(x)) = x$. Доказать, что существует точка x_0, в которой $f(x_0) = x_0$.

6. Показать, что для матрицы A размера 10×10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 10^{-10} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ |A - \lambda E| = \lambda^{10} - 10^{-10}.$$

7. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти такую точку (x_0, y_0), чтобы площадь треугольника, ограниченного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.