

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**«ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ»**

Ростов-на-Дону  
2013 год.

*В цифровой обработке сигналов все математические средства хороши.*

Фихиро.

# 1 Сигналы

## 1.1 Основные определения

Любую функцию вещественного переменного будем называть сигналом. В зависимости от того, какие значения принимает эта функция, будем рассматривать вещественные и комплексные сигналы. Множество (поле) вещественных чисел будем обозначать, как обычно, через  $\mathbb{R}$ , а множество (поле) комплексных чисел — через  $\mathbb{C}$ . Кроме того, будут исследоваться сигналы, принимающие свои значения в произвольном конечном поле  $\mathbb{F}$ .

Если мощность области определения сигнала больше чем счётная, то сигнал называется аналоговым (или «непрерывным»). Конечно, будем рассматривать «непрерывную» область определения, то есть содержащую все свои предельные точки. Конечно, во множестве аналоговых («непрерывных») сигналов имеются разрывные функции. Удобно считать, что аналоговый («непрерывный») сигнал определён на всей вещественной прямой. Иногда аналоговый («непрерывный») сигнал будет рассматриваться на некоторой части вещественной прямой. Тогда можно считать, что на оставшейся части прямой он равен нулю или, в некоторых случаях, на оставшуюся часть продолжен периодически. Для анализа аналоговых («непрерывных») сигналов применяются различные математические средства, в том числе и теория обобщённых функций. Для этого некоторые обобщённые функции приходится считать аналоговыми («непрерывными») сигналами.

Если область определения сигнала состоит из конечного или счётного множества значений аргумента, то такой сигнал называется дискретным. Удобно считать, что область определения дискретного сигнала есть множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  или некоторое его подмножество. Таким образом, любая бесконечная (или конечная) последовательность чисел называется дискретным сигналом. В случае конечной последовательности (то есть вектора) сигнал называется дискретным конечной длительности. Иногда такой сигнал будем продолжать на всё  $\mathbb{Z}$ , полагая его равным нулю во всех оставшихся точках. Кроме того, дискретный сигнал конечной длительности в некоторых случаях естественно продолжать периодически. Дискретные сигналы будем обозначать строчными латинскими буквами. Например, три сигнала можно обозначить  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для сигнала  $x$  его  $n$ -й элемент бу-

дем обозначать  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В некоторых книгах по цифровой обработке сигналов, рассчитанных на инженеров, обозначение  $x(n)$  зарезервировано для аналоговых сигналов, а для дискретных сигналов применяется обозначение  $x[n]$  с квадратными скобками. В данном пособии будет применяться общематематическое обозначение  $x(n)$  для сигналов любого типа. Если рассматривается несколько сигналов, то иногда будем их нумеровать нижними индексами. Например,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  есть последовательность из  $n$  сигналов. Дискретный сигнал называется финитным, если у него имеется лишь конечное число ненулевых элементов. Сигналы, получающиеся в результате некоторых важных преобразований, будем обозначать заглавными латинскими буквами. Обычно дискретный сигнал строится из непрерывного с помощью «взятия отсчётов», то есть нахождения значений аналогового («непрерывного») сигнала при определённых значениях аргумента. Чаще всего это точки

$$t_n = n\Delta t,$$

где  $0 < \Delta t < \infty$  — (постоянный) шаг дискретизации и  $n \in \mathbb{Z}$ . Эту процедуру будем называть дискретизацией. Таким образом, в результате дискретизации аналогового сигнала  $x_a(t)$  получаем дискретный сигнал  $x_d$  такой, что

$$x_d(n) = x_a(n\Delta t).$$

Величина

$$\omega = \frac{1}{\Delta t},$$

обратная шагу дискретизации, называется частотой дискретизации. Иногда используется переменный шаг дискретизации. Это связано с тем, что при некоторых значениях аргумента нужно исследовать более детально свойства сигнала. При этом, конечно, усложняется анализ полученных данных. В данном пособии переменный шаг дискретизации рассматриваться не будет.

Если область значений дискретного сигнала конечна или счётна, то сигнал называется цифровым. Он получается из дискретного сигнала квантованием по уровню. Это значит, что сигнал может принимать не все значения, а только заданные. Поэтому значения округляются тем или иным способом до разрешённого значения. Конечно, при этом теряется часть информации. Особенно это заметно при постоянном шаге квантования и невысоком уровне сигнала. Тогда округление заметно сказывается на достоверности полученного цифрового сигнала. Чтобы этот эффект уменьшить вводится переменный шаг квантования, который тем меньше, чем меньше уровень сигнала. В данном пособии цифровые сигналы рассматриваться не будут ввиду сложности их анализа, а основным объектом изучения будут дискретные сигналы.

Обозначим через  $\tau$  оператор сдвига дискретного сигнала (последовательности) на один шаг вправо. Иными словами,

$$(\tau x)(n) = x(n - 1)$$

для любого  $n$ . Тогда  $k$ -я степень оператора сдвига действует по правилу

$$(\tau^k x)(n) = x(n - k)$$

для любого целого  $k$ .

Для сигналов дискретных  $x$  и  $y$  через  $x + y$  будем обозначать их сумму, то есть такую последовательность, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных сигналов:

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Сложение сигналов происходит в среде, где выполняется физический принцип суперпозиции.

Через  $\alpha x$  будем обозначать дискретный сигнал, «усиленный» в  $\alpha$  раз. Это значит, что все члены последовательности  $\alpha x$  получаются умножением на  $\alpha$  соответствующих членов последовательности  $x$ . Сумма аналоговых сигналов и произведение на число («усиление») определяется так же, как и для дискретных сигналов.

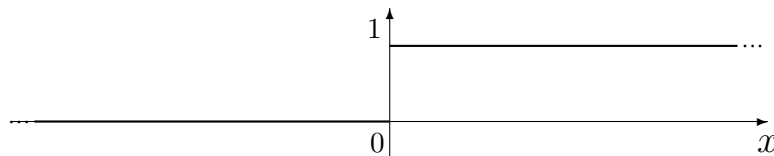
### Примеры аналоговых (непрерывных) сигналов.

1. Единичный импульс. Это «дельта»-функция П. Дирака  $\delta(x)$ . Она является обобщённой функцией, то есть линейным ограниченным функционалом, определённым на пространстве пробных функций равенством  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$  для любой пробной функции  $\varphi(x)$ . Конечно  $\delta(x)$  не является непрерывным сигналом, так как не является функцией. Однако при анализе непрерывных сигналов её роль неопределима.

2. Единичная ступенька (единичный скачок, функция включения). Это функция Хевисайда

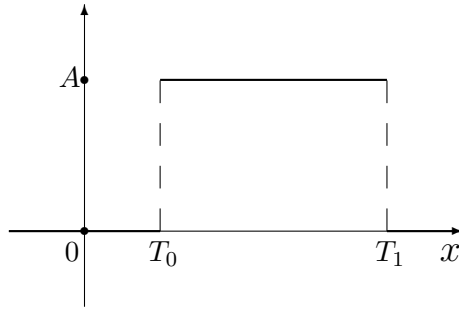
$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Её график имеет вид



Прямоугольный импульс с амплитудой  $A$  и длительностью  $T = T_1 - T_0$ :

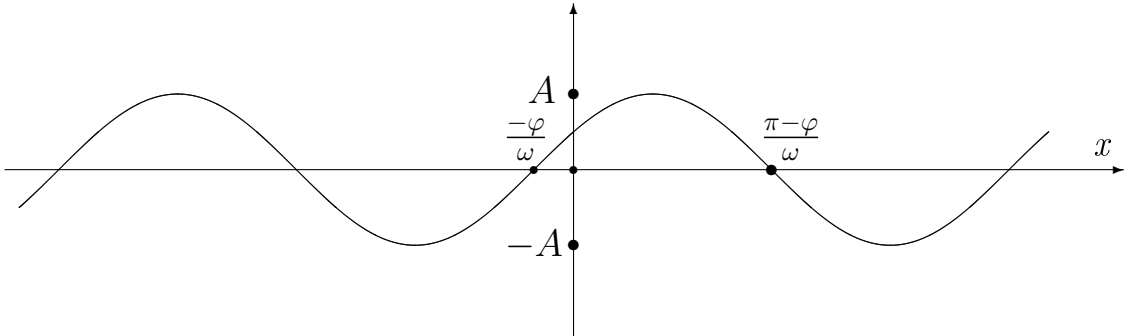
$$s(t) = A(u(t - T_0) - u(t - T_1)).$$



### 3. Вещественный гармонический сигнал

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Здесь вещественные числа  $A$ — амплитуда,  $\omega$ — круговая частота,  $\varphi$ — начальная фаза. Частота сигнала  $f$  связана с круговой частотой  $\omega$  соотношением  $\omega = 2\pi f$ . График гармонического сигнала имеет вид



По ряду причин для описания гармонического сигнала используется не синус, а косинус

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

где вещественные числа  $A$ — амплитуда,  $\omega$ — круговая частота,  $\varphi$ — начальная фаза. Обычно амплитуда и частота положительны, однако при переходе к комплексному гармоническому сигналу в теории возникают и отрицательные частоты.

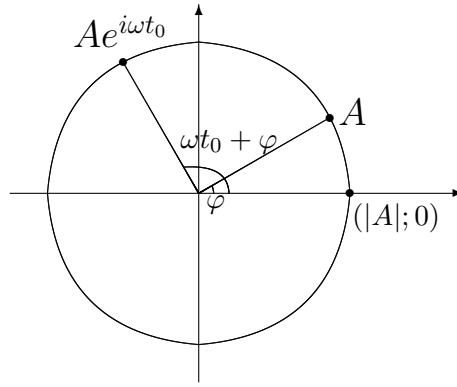
### 4. Комплексный гармонический сигнал

$$f(t) = Ae^{i\omega t}.$$

Здесь  $A \in \mathbb{C}$ — комплексная амплитуда,  $\omega \in \mathbb{R}$ — круговая частота. Если  $A = |A|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = \arg A$ — начальная фаза, то

$$f(t) = |A|e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Заметим, что значения этого сигнала располагаются в комплексной плоскости на окружности радиуса  $|A|$  с центром в начале координат



Представление сигналов с помощью комплексных гармонических сигналов удобно для дальнейшего исследования. Например, вещественный гармонический сигнал можно представить в такой форме. Для этого вспомним формулу Л. Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (3)$$

которую можно преобразовать, меняя  $x$  на  $-x$ , к виду

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (4)$$

А теперь, если сложить эти два равенства или из первого вычесть второе равенство, получим два полезных равенства

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x. \quad (5)$$

Поэтому

$$A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \quad (6)$$

и (если учесть равенства  $1/i = -i = e^{-\frac{\pi i}{2}}$ )

$$A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2})} e^{-i\omega t} \quad (7)$$

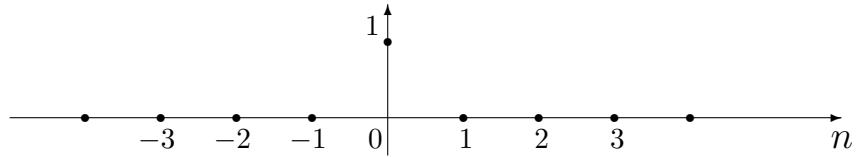
Таким образом, сигнал (2) в (6) разложен в сумму двух гармонических комплексных сигналов с круговыми частотами  $\omega$ ,  $-\omega$  и комплексными амплитудами  $\frac{A}{2} e^{i\varphi}$ ,  $\frac{A}{2} e^{-i\varphi}$ . Сигнал (1) в (7) разложен в сумму двух гармонических комплексных сигналов с круговыми частотами  $\omega$ ,  $-\omega$  и комплексными амплитудами  $\frac{A}{2} e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$ ,  $\frac{A}{2} e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$ . Эти соотношения приводят к появлению отрицательных частот, лишённых физического смысла. Однако, при обработке реальных сигналов эффекты, связанные с появлением отрицательных частот, в некоторых случаях проявляются в какой-нибудь форме и бывают неожиданными, если не знать об этом.

### Примеры дискретных сигналов.

1. Единичный импульс  $\delta$ . Это последовательность с элементами

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases}$$

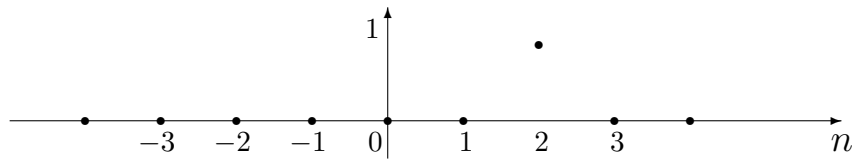
График единичного импульса имеет вид



2. Сдвинутый на  $k \in \mathbb{Z}$  единичный импульс  $e_k$ . Это последовательность с элементами

$$e_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n \neq k. \end{cases}$$

Например, график дискретного сигнала  $e_2$  имеет вид



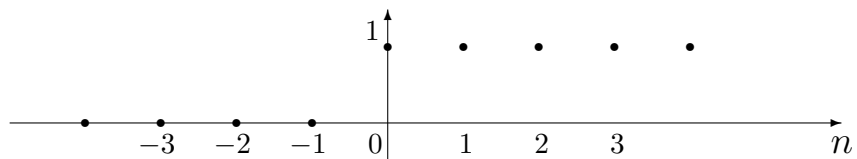
Очевидно, что  $e_k = \tau^k \delta$ . Любой дискретный сигнал  $x$  с элементами  $x(n)$  можно представить в виде ряда

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \tau^k \delta.$$

3. Единичная ступенька  $u$ . Это последовательность с элементами

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Её график имеет вид



Для единичной ступеньки имеет место равенство

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \delta.$$

Единичный импульс тоже можно выразить через единичную ступеньку с помощью сдвига:

$$\delta = u - \tau u.$$

Энергия аналогового сигнала  $x$  по определению равна

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Энергия дискретного сигнала  $x$  вычисляется по формуле

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Периодические ненулевые сигналы имеют бесконечную энергию. Утрируя, можно сказать, что в природе «в чистом виде» такие сигналы не существуют. Однако большинство колебательных процессов локально хорошо описывается периодическими функциями. Поэтому для упрощения анализа удобно считать возникающие при таких процессах сигналы периодическими. По определению дискретный сигнал  $x$  называется периодическим, если существует ненулевое целое число  $N$  такое, что для всех целых  $n$  справедливо равенство  $x(n + N) = x(n)$ . Число  $N$  называется периодом сигнала. Конечно, если  $N$  является периодом, то и числа  $-N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$  являются периодами. Так как период является целым числом, то у периодического сигнала всегда имеется наименьший положительный период. Среди периодических сигналов важную роль играют гармонические сигналы вида  $A \cos(\omega n + \varphi)$ ,  $A \sin(\omega n + \varphi)$ ,  $Ae^{i\omega n}$  с круговой частотой  $\omega \in \mathbb{R}$ . При  $A \neq 0$  и  $\omega \neq 0$  они будут периодическими тогда и только тогда, когда дробь  $2\pi/\omega$  является рациональным числом. При этом, если для взаимно простых целых чисел  $p$  и  $q$  (это значит, что дробь  $p/q$  несократима) верно равенство  $p/q = 2\pi/\omega$ , то наименьший положительный период сигнала равен  $p$ . В терминах частоты сигнала это можно сформулировать следующим образом. Гармонический дискретный сигнал является периодическим тогда и только тогда, когда его частота рациональна. При этом, если частота равна  $f = q/p$  для взаимно простых целых чисел  $p$  и  $q$ , то наименьший положительный период равен  $p$ .

## 1.2 Пространства сигналов

Для анализа как непрерывных так и дискретных сигналов удобно ввести линейные пространства сигналов с обычными поточечными операциями сложения сигналов и их умножения на элементы (скаляры) подходящего поля. А именно, для аналоговых сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$  их сумму определим по формуле  $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ , умножение на  $\alpha \in \mathbb{F}$  — по формуле  $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ . Наиболее естественны при анализе аналоговых сигналов банаховы пространства  $L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . При  $1 \leq p < \infty$   $L_p(a, b)$  состоит из всех интегрируемых по Лебегу функций  $u$  (точнее классов функций (загляните в учебники по функциональному анализу ([7]) и по теории функций действительного переменного и насладитесь



красивейшими из теорий!), для которых конечна норма

$$\|u\|_p = \left( \int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Часто используются пространство  $L_1(a, b)$  всех (абсолютно) интегрируемых по Лебегу функций с нормой

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)| dt < \infty$$

и гильбертово пространство  $L_2(a, b)$  всех аналоговых сигналов с конечной энергией

$$E = \|u\|_2^2 = \int_a^b |u(t)|^2 dt < \infty.$$

Банахово пространство  $L_\infty(a, b)$  состоит из всех измеримых по Лебегу функций  $u$ , для которых

$$\|u\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |u(t)| < \infty,$$

где супремум берётся особым способом (умоляю вас, загляните в учебник по функциональному анализу [7]).

Аналогичные пространства используются для анализа дискретных сигналов. Банахово пространство  $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z})$  при  $1 \leq p < \infty$  состоят из последовательностей  $x$ , для которых конечна норма

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Банахово пространство  $\ell_1$  с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|$$

важно при рассмотрении устойчивых цифровых фильтров, а гильбертово пространство  $\ell_2$  состоит из всех дискретных сигналов с конечной энергией

$$E = \|x\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)|^2 < \infty.$$

Банахово пространство  $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{Z})$  состоят из последовательностей  $x$ , для которых

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x(k)| < \infty$$

и, следовательно, состоят из всех ограниченных дискретных сигналов.

### 1.3 Преобразование Фурье

При исследовании аналогового сигнала  $x(t)$  на предмет его «частотного содержания» или «спектра» обычно сначала вычисляется преобразование Фурье

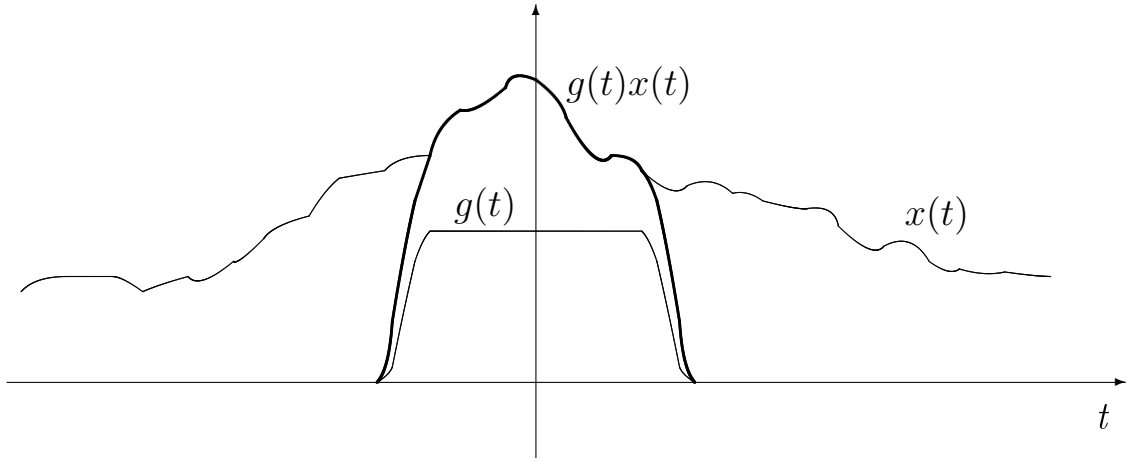
$$X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\xi t} dt. \quad (8)$$

Условия существования интеграла и свойства функции  $X(\xi)$  изучаются в курсе математического анализа. Поэтому этими вопросами здесь не будем интересоваться. Всюду будем считать, что свойства функций таковы, что можно делать необходимые преобразования. Например, можно считать, что аналоговый сигнал принадлежит пространству функций  $L_2(\mathbb{R})$ . В случае необходимости класс рассматриваемых функций можно сузить. Функция  $X(\xi)$  называется спектральной функцией или спектральной плотностью сигнала. Её носитель называется спектром сигнала. Если носитель спектральной функции компактен, то сигнал называется сигналом с ограниченным спектром.

Обратное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)e^{i\xi t} d\xi. \quad (9)$$

Заметим, что обратимость преобразования Фурье приводит к тому, что вся информация о сигнале содержится полностью как в самом аналоговом сигнале  $x$ , так и в его спектральной функции  $X$ . Однако, глядя на сигнал  $x$ , трудно выявлять его частотные свойства, а, глядя на спектральную функцию, трудно увидеть временные характеристики. Кроме того, частотные характеристики, присутствующие в спектральной функции, перемешаны во времени. В некоторых случаях нужно знать о частотных свойствах сигнала в данный момент времени (точнее, в окрестности этого момента), как в партитуре музыканта записано какую ноту (частотная информация) когда и сколько играть (временная информация). Для этого используется оконное преобразование Фурье. Сначала сигнал  $x(t)$  умножается на фиксированную функцию окна  $g(t)$ . Она привязана к исследуемому интервалу и срезает значения сигнала вне этого интервала.



Затем вычисляется преобразование Фурье. Эти вычисления повторяются со сдвинутой функцией окна  $g(t - n\Delta t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, вычисляется семейство спектральных функций

$$X_n(\xi) = \int x(t)g(t - n\Delta t)e^{-i\xi t} dt.$$

На первый взгляд кажется, что лучшая функция окна равна единице на исследуемом интервале и равна нулю вне его. Но эта функция имеет разрывы, что приводит к появлению ложных колебаний в спектральной функции. Это и есть так называемый эффект Гиббса. Чтобы его избежать, выбирают функцию окна достаточно гладкую. Это несколько искажает сигнал, но это меньшее зло. Есть специальные методы расчёта окон (см. [1], [2], [4] и имеющиеся там ссылки).

## 1.4 Ряд Фурье

Пусть  $x$  есть дискретный сигнал. Тогда ему можно сопоставить сумму ряда Фурье

$$X(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)e^{-i\omega k}.$$

Она называется спектральной функцией дискретного сигнала. Ряды Фурье достаточно полно изучаются в курсе математического анализа. Поэтому точные теоремы здесь не приводятся. Отметим только, что спектральная функция дискретного сигнала  $2\pi$ -периодична. Дискретный сигнал восстанавливается по спектральной функции с помощью равенства

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega k} d\omega, k \in \mathbb{Z}.$$

## 1.5 Дискретизация сигнала

Одним из основных действий в цифровой обработке сигналов является дискретизация аналогового сигнала  $x_a$ . Под этим понимается построение

дискретного сигнала  $x$  с помощью вычисления значений (взятия отсчётов) аналогового сигнала в некоторых точках. Обычно эти значения вычисляются на сетке  $t_n = nT$  с постоянным шагом дискретизации  $T = \Delta t$ . Таким образом,

$$x(n) = x_a(nT), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Пусть аналоговый сигнал  $x_a(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , такой, что существует его преобразование Фурье (спектральная функция (синоним: спектральная плотность) сигнала)

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-i\Omega t} dt$$

и обратное преобразование Фурье

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (11)$$

Например, можно считать, что аналоговый сигнал принадлежит пространству функций  $L_2(\mathbb{R})$ . Заметим попутно, что обратимость преобразования Фурье приводит к тому, что вся информация о сигнале содержится полностью как в самом аналоговом сигнале  $x_a$ , так и в его спектральной функции  $X_a$ .

Ряд Фурье

$$X(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-in\omega} \quad (12)$$

даёт частотную характеристику  $X$  дискретного сигнала  $x$ , причём

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (13)$$

Равенства (10) и (11) дают, что

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{i\Omega nT} d\Omega.$$

Разобьём область интегрирования на не пересекающиеся интервалы

$$\mathbb{R} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{T}; \frac{(2k+1)\pi}{T} \right).$$

Тогда, учитывая свойство аддитивности области интегрирования, получим

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{T}}^{\frac{(2k+1)\pi}{T}} X_a(\Omega) e^{i\Omega nT} d\Omega$$

В каждом интеграле сделаем замену переменной так, чтобы новая область интегрирования совпала с интервалом  $[-\pi; \pi]$ . Для этого введём переменную по формуле

$$\omega = T\Omega - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Легко видеть, что это требуемая замена переменной. Тогда, с учётом

$$\Omega = \frac{\omega + 2k\pi}{T}, \quad d\Omega = \frac{d\omega}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

получим

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} X_a \left( \frac{\omega + 2k\pi}{T} \right) e^{i\omega n} e^{i2\pi kn} d\omega. \quad (16)$$

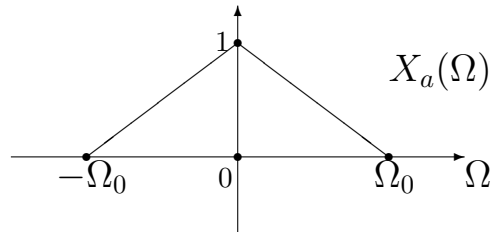
Комплексное число  $e^{i2\pi kn} = 1$ , так как  $kn$  — целое число. Будем считать, что спектральная функция  $X_a$  настолько хороша, что в формуле (16) можно поменять порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a \left( \frac{\omega + 2k\pi}{T} \right) e^{i\omega n} d\omega. \quad (17)$$

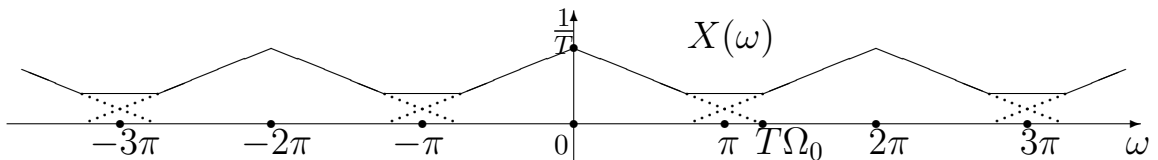
Сравнивая (13) и (17) с учётом единственности суммы ряда Фурье, получаем, что спектральная функция аналогового сигнала и частотная характеристика дискретизации связаны равенством

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a \left( \frac{\omega + 2k\pi}{T} \right). \quad (18)$$

Проведём анализ полученной формулы. Для этого рассмотрим аналоговый сигнал, спектральная функция  $X_a$  которого имеет следующий график:



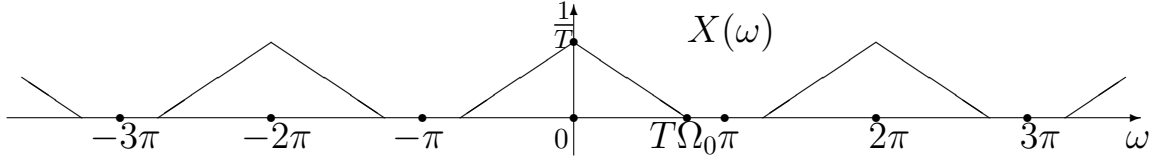
С учётом формул (14), (18) получим, что частотная характеристика дискретизации имеет график



В окрестности точки с абсциссой, равной  $\pi$ , на графике происходит наложение частот. Чтобы искажение частотной характеристики не происходило, нужно выполнение условия

$$T\Omega_0 \leq \pi. \quad (19)$$

Это условие принято называть условием Найквиста. Если это условие выполняется, то график частотной характеристики дискретизации имеет вид



и по основному периоду частотной характеристики дискретизации без труда восстанавливается спектральная функция аналогового сигнала

$$X_a(\Omega) = TX(T\Omega), \quad |\Omega| \leq \Omega_0. \quad (20)$$

Но тогда можно восстановить и сам аналоговый сигнал. Это и есть знаменитая теорема Котельникова, известная на западе («дикий» ведь) как теорема Шеннона-Найквиста. Выведем интерполяционную формулу, позволяющую по значениям дискретного сигнала, получать любое значение аналогового сигнала. С учётом формул (11), (20) и  $\omega = T\Omega$  при  $|\Omega| \leq \Omega_0$  получим

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} TX(T\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (21)$$

Сделаем замену переменной  $\omega = T\Omega$  в интеграле в формуле (21), тогда

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} X(\omega)e^{i\omega t/T} d\omega \quad (22)$$

В последнем интеграле  $X(\omega)$  можно заменить, используя формулу (12). Тогда

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)e^{-in\omega} e^{i\omega t/T} d\omega \quad (23)$$

Считаем, что сигнал хорош настолько, что можно поменять порядок интегрирования и суммирования. Тогда

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)} d\omega. \quad (24)$$

Последний интеграл нетрудно вычислить. Если  $\frac{t}{T} - n = 0$ , то  $e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)} = 1$  и

$$\int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)} d\omega = 2T\Omega_0. \quad (25)$$

Если  $\frac{t}{T} - n \neq 0$ , то

$$\int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)} d\omega = \frac{e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)}}{i(\frac{t}{T}-n)} \Big|_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} = \frac{e^{iT\Omega_0(\frac{t}{T}-n)} - e^{-iT\Omega_0(\frac{t}{T}-n)}}{i(\frac{t}{T}-n)}. \quad (26)$$

Последнее выражение нетрудно упростить. Для этого нужно воспользоваться вторым из равенств (5). Тогда равенство (26) можно преобразовать к виду

$$\int_{-T\Omega_0}^{T\Omega_0} e^{i\omega(\frac{t}{T}-n)} d\omega = \frac{2}{\frac{t}{T}-n} \sin\left(T\Omega_0\left(\frac{t}{T}-n\right)\right). \quad (27)$$

Следовательно

$$x_a(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \frac{\sin(\Omega_0(t - nT))}{t - nT}. \quad (28)$$

Таким образом, интерполяционная формула (28) позволяет вычислить значения аналогового сигнала «абсолютно точно» по его дискретизации. Для этого нужно выполнение условия Найквиста  $T\Omega_0 \leq \pi$ , которое требует, чтобы спектральная функция аналогового сигнала имела компактный носитель, содержащийся в интервале  $[-\Omega_0; \Omega_0]$ . О таком аналоговом сигнале говорят как о сигнале с ограниченным спектром, понимая под последним носитель функции  $X_a$ . Период дискретизации  $T$  связан с частотой дискретизации  $F$  равенством  $T = \frac{1}{F}$ . Верхняя граница спектра  $\Omega_0$  (круговая частота) связана с наибольшей частотой сигнала  $f$  соотношением  $\Omega_0 = 2\pi f$ . Тогда условие Найквиста можно записать в виде

$$\frac{1}{F} 2\pi f \leq \pi \quad \text{или} \quad F \geq 2f.$$

Таким образом, условие Найквиста приводит к правилу: частота дискретизации должна быть не менее чем в два раза больше, чем наивысшая частота сигнала. Однако то, что сигнал имеет компактный спектр приводит к тому, что сигнал описывается целой функцией (в том числе аналитической на всей вещественной прямой). Это достаточно узкий класс сигналов и на практике сигналы не удовлетворяют условию Найквиста точно. Всегда есть в сигнале компоненты, спектр которых достаточно широк. Например, различные помехи и шумы. Тем не менее, на практике эта теорема имеет большое значение, так как помехами и шумами в ряде случаев можно пренебречь в виду их малости. Например, звуковые сигналы, доступные к восприятию человеческим слухом, имеют ограниченный спектр. Этот спектр находится приблизительно между 20 Гц и 20000 Гц. Это значит, что при дискретизации с частотой не менее 40000 Гц, можно по полученному дискретному сигналу восстановить исходный аналоговый сигнал более или менее точно. Например, частота дискретизации звукового сигнала, принятая в настоящее время для записи на компакт-диск, равна 44100 Гц.

В заключение заметим, что для дискретизации («оцифровки») аналоговых сигналов имеются специальные устройства, которые называются аналогово-цифровыми преобразователями (АЦП). Обратное преобразование,

интерполирующее дискретный сигнал до аналогового, осуществляется цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП). Звуковые платы (карты) компьютеров содержат как АЦП, так и ЦАП. В CD-плеере имеется только ЦАП, если, конечно, не предусмотрена запись звукового сигнала. Следует сказать, что любой реальный ЦАП не использует интерполяционную формулу (28) в полном объёме даже в лучшем случае хотя бы потому, что в ней нужно находить сумму бесконечного ряда. Интерполяция осуществляется по упрощённой схеме и от того, насколько она близка к (28) зависит качество ЦАП.

## 1.6 Наложение спектров (алиасинг или элайсинг)

Если условие Найквиста не выполняется, то, как отмечено ранее, происходит наложение спектров или алиасинг. Он заключается в следующем. Составляющие исходного сигнала с частотами, большими половины частоты дискретизации, в восстановленном сигнале в отражённом относительно половины частоты дискретизации виде накладываются на частоты, находящиеся в нижней части спектра.

Рассмотрим пример, часто приводимый в литературе. При аналоговой записи музыки, спектр которой ограничен частотой 20000 Гц, была записана и помеха от медицинского прибора с ультразвуковой частотой 39000 Гц. Так как бытовая аппаратура (громкоговорители) не воспроизводит сигналы с ультразвуковой частотой, то звучание записи было вполне удовлетворительно. Было решено оцифровать запись с частотой дискретизации 44100 Гц. При этом по теореме Котельникова звуковой сигнал с частотами ниже 22050 Гц должен воспроизводиться правильно. Но помеха имеет частоту, большую половины частоты дискретизации. Поэтому произойдёт наложение спектров. И помеха будет слышна на частоте  $22050 - (39000 - 22050) = 44100 - 39000 = 5100$  Гц. Таким образом, помеха переместилась из ультразвуковой области в звуковую (слышимую) область.

Этот простой пример показывает всю нежелательность алиасинга. Если не принимать мер, то он может проявиться при оцифровке любых сигналов, в том числе и изображений. Меры, применяемые обычно при борьбе с алиасингом, следующие.

1. Если имеется возможность, то использовать более высокую частоту дискретизации, настолько высокую, чтобы выполнялось условие Найквиста.

2. Ограничить (срезать) спектр сигнала перед оцифровкой настолько, чтобы выполнялось условие Найквиста.

Для ограничения спектра существуют специальные фильтры. В нашем случае нужен фильтр низких частот. Он пропускает составляющие сиг-



нала с частотами, ниже заданной почти без изменений, и не пропускает с более высокими частотами. Эта заданная частота называется частотой среза фильтра. Так как фильтрация должна быть проведена перед оцифровкой, то фильтр низких частот должен быть аналоговым. Правда можно поступить и иначе. Сначала выбрать частоту оцифровки настолько большую, что алиасинга нет. После этого применить цифровой фильтр низких частот, а затем уменьшить частоту дискретизации.

## 1.7 Практическое задание

Рассмотреть аналоговый сигнал

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Используя доступную компьютерную систему численных вычислений (например, свободно распространяемую Scilab),

1. прибавить к сигналу «белый шум» (можно во время дискретизации);
2. дискретизировать сигнал;
3. с помощью дискретного преобразования Фурье определить частоты составляющих;
4. меняя частоту дискретизации добиться возникновения алиасинга.

## 1.8 Тест

1. Возникнет ли алиасинг, если частоту среза анти-алиасингового фильтра взять ниже половины частоты дискретизации? Почему?

а) Так точно. Частота среза должна быть равна половине частоты дискретизации.

б) Никак нет. Сигнал удовлетворяет условию Найквиста.

в) Так точно. Сигнал не удовлетворяет условию Найквиста.

г) Никак нет. Сигнал равен нулю.

д) Так точно. Частота среза слишком мала.

2. При частоте дискретизации 44100 Гц частота анти-алиасингового фильтра установлена равной 24000 Гц. Возникнет ли алиасинг? Насколько будет испорчена запись звукового сигнала? Почему?

а) Так точно. Полностью испорчена и неразборчива. Не выполняется условие Найквиста.

б) Никак нет. Не испорчена и полностью разборчива. Хотя условие Найквиста и не выполняется, но в звуковом сигнале нет частот выше половины частоты дискретизации.

в) Так точно. Алиасинг возникает всегда, когда частота среза фильтра не ниже половины частоты дискретизации. Запись будет испорчена.

г) Никак нет. Частота дискретизации достаточно большая.

д) Так точно. Условие Найквиста не выполняется. Конечно, есть составляющие сигнала с частотами выше 22050 герц. Например, шум. Они отражаются и накладываются на частоты от 20 000 до 22 000 герц. Их человеческое ухо практически не слышит. Поэтому запись не будет испорчена.

3. Известно, что для того, чтобы речь была разборчивой, достаточно взять частоту дискретизации 8000 Гц. Будет ли сообщение разборчивым, если оцифровать на этой частоте вашу любимую мелодию? Почему?

а) Так точно. Но мелодия будет как на низкосортном мобильном телефоне у препода по цифровой обработке сигналов.

б) Никак нет. По условию Найквиста можно воспроизвести только частоты до 4000 герц. А моя любимая музыка имеет более высокие частоты, столь любимые соседями.

в) Так точно. Частоты, большие 8000 герц отразятся относительно 4000 герц и уйдут в отрицательные частоты. Сообщение будет почти полностью или полностью разборчивым.

г) Никак нет. Частоты, большие 4000 герц отразятся и наложатся на низкие частоты. Сообщение будет почти полностью или полностью неразборчивым.

д) Никак нет. Частоты, большие 8000 герц отразятся и наложатся на низкие частоты. Сообщение будет почти полностью или полностью неразборчивым.

4. Можно ли для борьбы с алиасингом сначала оцифровать сигнал, а затем пропустить через цифровой фильтр низких частот с частотой среза, равной половине частоты дискретизации.

а) Так точно. Условие Найквиста выполняется.

б) Никак нет. Нужно взять частоту среза чуть меньше половины частоты дискретизации.

в) Так точно. Ведь цифровой фильтр ничем не хуже аналогового.

г) Никак нет. Частоты, большие половины частоты дискретизации отразятся и наложатся на низкие частоты. Фильтр их пропустит и не поможет.

д) Никак нет. В этом случае нужно брать цифровой фильтр высоких частот с частотой среза, равной половине частоты дискретизации.

## 2 Системы

### 2.1 Линейные системы

В самом общем виде система — это отображение, переводящее сигнал в сигнал. В том случае, когда мы рассматриваем сигналы, принадлежащие какому-нибудь линейному пространству, система — то же самое, что и оператор, определённый на этом пространстве. Будем систему обозначать  $S$ . Если после обработки системой  $S$  входного сигнала  $x$  получается сигнал  $y$ , то этот факт будем записывать в виде  $y = Sx$ . Сигнал  $y$  часто (или иногда) будем называть откликом системы  $S$  на входной сигнал  $x$ . Важен класс линейных систем. Это системы, для которых выполняется физический принцип суперпозиции. Иными словами отклик линейной системы на взвешенную сумму сигналов равен взвешенной с теми же весами сумме откликов на исходные сигналы. Точная формулировка следующая. Для любых (сигналов)  $x_1$  и  $x_2$  из линейного пространства сигналов, любых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$

$$S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Sx_1 + \alpha_2 Sx_2.$$

На самом деле при дальнейшем анализе дискретных систем необходимо более сильное условие. Для любой последовательности сигналов  $x_1, x_2, \dots$  и любой последовательности скаляров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  таких, что ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$  сходится в каком либо смысле, справедливо равенство

$$S\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j S(x_j).$$

Здесь, конечно, подразумевается, что ряд в правой части равенства сходится в том же смысле. Это условие выполняется, если система описывается линейным ограниченным оператором, действующем в банаховом пространстве сигналов и сходимость понимается как сходимость по норме.

### 2.2 Инвариантные к сдвигу системы

Система называется инвариантной к сдвигу, если она коммутирует с оператором сдвига, то есть

$$S\tau = \tau S.$$

Это означает вот что. Пусть известны входной сигнал и отклик системы на этот сигнал. Если нужно построить новый входной сигнал сдвигом первоначального входного сигнала, то отклик на него инвариантной к сдвигу системы легко найти, сдвинув на столько же первоначальный отклик. Если инвариантная к сдвигу система коммутирует со сдвигом, то повторяя

это несколько раз, видим, что для любого  $k \in \mathbb{Z}$  система коммутирует с оператором сдвига на  $k$ , определённый по формуле

$$\tau^k x(n) = x(n - k) \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для инвариантной к сдвигу системы справедливо равенство

$$S\tau^k = \tau^k S.$$

### Примеры систем.

1. «Шумоподавитель». Для фиксированного положительного числа  $C$ , если член входного сигнала удовлетворяет соотношению  $|x(n)| \geq C$ , то соответствующий член отклика равен  $y(n) = x(n)$ ; если же  $|x(n)| < C$ , то  $y(n) = 0$ . Легко видеть, что эта система является инвариантной к сдвигу, но нелинейной.

2. «Децимация». В отклике остаётся без изменения величины только каждый десятый член входного сигнала:  $y(k) = x(10k)$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Легко видеть, что эта система является линейной, но не инвариантной к сдвигу.

3. «Усреднение»  $r + s + 1$ -го порядка. Все члены отклика  $y$  на входной сигнал  $x$  вычисляются по формуле

$$y(k) = \frac{x(k - r) + \dots + x(k - 1) + x(k) + x(k + 1) + \dots + x(k + s)}{s + r + 1}$$

для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Легко видеть, что эта система является линейной и инвариантной к сдвигу. Если  $r = s$ , то «усреднение» называется симметричным. Если  $r = 0$ , то «усреднение»

$$y(k) = \frac{x(k) + x(k + 1) + \dots + x(k + s)}{s + 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

называется левым  $s + 1$ -го порядка. Если  $s = 0$ , то «усреднение»

$$y(k) = \frac{x(k - r) + \dots + x(k - 1) + x(k)}{r + 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

называется правым  $r + 1$ -го порядка. Эта система часто используется в приложениях и называется фильтром скользящего среднего.

4. Конечная разность первого порядка.

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k - 1)}{2}$$

для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . На техническом сленге эта процедура называется дифференцированием.

## 5. Рекурсивный фильтр.

$$y(k) = \sum_{l=1}^N a_l y(k-l) + \sum_{s=-R}^M b_s x(k-s), \text{ при } \sum_{l=1}^N |a_l| \neq 0,$$

для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Легко видеть, что эта система является линейной и инвариантной к сдвигу. Обычно рассматривают фильтры с  $R = 0$ . Если это не так, то приходится вычислять  $y(n)$  лишь когда в систему поступит  $x(n+R)$ . Это не всегда удобно, так как приводит к задержке отклика на  $R$  тактов. Если  $\sum_{l=1}^N |a_l| = 0$ , фильтр называется нерекурсивным.

## 6. Нерекурсивный фильтр.

$$y(k) = \sum_{s=-R}^M b_s x(k-s)$$

для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Легко видеть, что эта система является линейной и инвариантной к сдвигу. Очевидно, что фильтр «усреднение» является нерекурсивным фильтром.

## 2.3 Цифровой фильтр

Линейная инвариантная к сдвигу система называется цифровым фильтром. Так как для любого дискретного сигнала справедливо разложение

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \tau^k \delta$$

то с учётом линейности системы получим

$$Sx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) S \tau^k \delta.$$

Так как система  $S$  инвариантна к сдвигу, то

$$Sx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \tau^k S \delta.$$

Обозначим через  $h$  отклик системы  $S$  на единичный импульс  $\delta$  и назовём импульсной характеристикой системы  $S$ . Следовательно,  $h = S\delta$ , но тогда

$$Sx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \tau^k h. \quad (29)$$

Перейдём в (29) к членам последовательностей. Так как  $(\tau^k h)(n) = h(n - k)$ , то для  $n$ -го члена отклика  $y = Sx$  имеет место формула

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k). \quad (30)$$

Конечно, эту формулу можно переписать в виде

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n - k)x(k). \quad (31)$$

Такое «умножение» последовательностей называется их свёрткой. То есть полученная последовательность  $y$  называется свёрткой последовательностей  $x$  и  $h$ . Свёртку последовательностей  $x$  и  $h$  будем обозначать

$$y = h * x. \quad (32)$$

Здесь следует заметить, что знак  $*$  для обозначения свертки был введен задолго до появления клавиатуры компьютера, на которой есть этот, уже знаменитый, знак. Импульсную характеристику  $h$  системы математики называют ядром свёртки. Формулы (30), (31), (32) демонстрируют полезность знания импульсной характеристики системы. В следующих примерах вычислим импульсную характеристику для некоторых систем.

### Примеры.

1. «Усреднение»  $r + s + 1$ -го порядка:

$$y(k) = \frac{x(k - r) + \dots + x(k - 1) + x(k) + x(k + 1) + \dots + x(k + s)}{s + r + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Импульсная характеристика легко находится по определению, если положить  $x = \delta$

$$h(j) = \begin{cases} \frac{1}{s+r+1}, & \text{если } -s \leq j \leq r; \\ 0, & \text{при остальных } j. \end{cases}$$

2. Конечная разность первого порядка:

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k - 1)}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

По определению, полагая  $x = \delta$ , получаем, что импульсная характеристика состоит из членов

$$h(j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } j = 0; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } j = 1; \\ 0, & \text{при остальных } j. \end{cases}$$

### 3. Нерекурсивный фильтр:

$$y(k) = \sum_{s=-R}^M b_s x(k-s), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Снова полагая  $x = \delta$ , получаем, что импульсная характеристика фильтра состоит из членов  $h(k) = b_k$  при  $-R \leq k \leq M$  и при  $h(k) = 0$  остальных  $k$ .

### 4. Рекурсивный фильтр:

$$y(k) = \sum_{l=1}^N a_l y(k-l) + \sum_{s=-R}^M b_s x(k-s), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для этого фильтра найти импульсную характеристику «в явном виде» сложнее, чем для предыдущих примеров. Для этого нужен метод, изложенный на странице 31. Там же можно научиться находить импульсную характеристику рекурсивного фильтра.

Если импульсная характеристика системы (фильтра) отлична от нуля только для конечного числа её членов, то она (он) называется КИХ-системой (фильтром). В противном случае система (фильтр) называется БИХ-системой (фильтром). КИХ — это аббревиатура от «конечная импульсная характеристика», БИХ — от «бесконечная импульсная характеристика». В первых трёх вышеприведённых примерах даны КИХ-фильтры, в последнем — БИХ-фильтр.

Рассмотрим простейшие свойства свёртки.

1. Свёртка коммутативна. Это значит, что если существуют последовательности  $h * x$  и  $x * h$ , то они равны  $h * x = x * h$ . Действительно, если  $z = x * h$ , то

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k).$$

и после замены индекса суммирования  $l = n - k$ ,  $k = n - l$  получим

$$z(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)h(n-l) = y(n)$$

для любого  $n$ . То есть  $z = y$ .

2. Если существует свёртка  $h * x$ , то  $(\alpha h) * x = h * (\alpha x) = \alpha(h * x)$ . Это свойство нетрудно доказать самостоятельно.

3. Свёртка ассоциативна. Это значит, что если существуют последовательности  $h * x$ ,  $g * (h * x)$ ,  $g * h$ ,  $(g * h) * x$ , то имеет место равенство  $g * (h * x) = (g * h) * x$ . Проверьте.

4. Свёртка дистрибутивна относительно сложения сигналов. Это значит, что если существуют последовательности  $h * x$ ,  $h * y$ ,  $h * (x + y)$ , то верно

равенство  $h * (x + y) = h * x + h * y$ . Это свойство легко проверяется. Проверьте.

5. Для единичного импульса  $\delta$  верно равенство  $x * \delta = x$ . Проверьте.

6.  $e_k * x = \tau^k x$ . Проверьте.

7. Свёртка  $x * h \in \ell_1$  для любого сигнала  $x \in \ell_1$  тогда и только тогда, когда  $h \in \ell_1$ . При этом  $\|x * h\|_{\ell_1} \leq \|x\|_{\ell_1} \|h\|_{\ell_1}$ .

Действительно, пусть сначала  $x, h \in \ell_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|x * h\|_{\ell_1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(x * h)(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)h(k - m) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |x(m)| |h(k - m)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x(m)| |h(k - m)| = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |x(m)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k - m)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |x(m)| \sum_{l \in \mathbb{Z}} |h(l)| = \|x\|_{\ell_1} \|h\|_{\ell_1} \end{aligned}$$

Порядок суммирования можно менять, так как второй ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь для любого  $x \in \ell_1$  свёртка  $x * h \in \ell_1$ . Возьмём  $x = \delta \in \ell_1$ . Тогда  $x * h = \delta * h = h \in \ell_1$ .

8. Для любого сигнала  $x \in \ell_\infty$  свёртка  $x * h \in \ell_\infty$  тогда и только тогда, когда  $h \in \ell_1$ . При этом  $\|x * h\|_{\ell_\infty} \leq \|x\|_{\ell_\infty} \|h\|_{\ell_1}$ .

Действительно, для  $x \in \ell_\infty, h \in \ell_1$

$$\begin{aligned} \|x * h\|_{\ell_\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} |(x * h)(k)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)h(k - m) \right| \leq \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |x(m)| |h(k - m)| \leq \sup_{m \in \mathbb{Z}} |x(m)| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(k - m)| = \\ &\leq \|x\|_{\ell_\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(m)| \leq \|x\|_{\ell_\infty} \|h\|_{\ell_1} \end{aligned}$$

Пусть теперь для любого сигнала  $x \in \ell_\infty$  свёртка  $x * h \in \ell_\infty$ . Возьмём

$$x(k) = \begin{cases} \frac{\overline{h(-k)}}{|h(-k)|}, & \text{если } h(-k) \neq 0, \\ 0, & \text{если } h(-k) = 0. \end{cases}$$

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение. Легко видеть, что  $x \in \ell_\infty$ . Тогда  $x * h \in \ell_\infty$ . С другой стороны

$$(x * h)(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)x(0 - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \frac{\overline{h(k)}}{|h(k)|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)|.$$

Поэтому  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < \infty$ .



9. Пусть по последовательностям  $x$ ,  $y$ ,  $u$  построены ряды Лорана

$$X(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)z^m, \quad Y(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y(n)z^n, \quad U(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j)z^j.$$

Последовательность  $u$  есть свёртка последовательностей  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда  $U(z) = X(z)Y(z)$ .

Действительно,

$$U(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)z^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} y(n)z^n$$

и

$$U(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} y(n)z^{n+m}$$

Приведём подобные по степеням  $z$ . Для этого сделаем замену переменной суммирования  $j = n + m$ . Тогда

$$U(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(j - n)y(n)z^j.$$

Последнее равенство возможно лишь при

$$u(j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(j - n)y(n) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

В частности, когда сигналы финитны и равны нулю при отрицательных аргументах, то ряды Лорана есть просто многочлены. Тогда члены свёртки последовательностей есть коэффициенты произведения многочленов. Теперь Вы знаете, что перемножая два многочлена, мы находим свертку.

## 2.4 Устойчивые фильтры

Цифровой фильтр называется устойчивым, если ограниченный дискретный сигнал он переводит в ограниченный. Свойство 8 в предыдущем пункте показывает, что цифровой фильтр устойчив тогда и только тогда, когда его импульсная характеристика принадлежит пространству  $\ell_1$ . Так как финитные импульсные характеристики принадлежат  $\ell_1$ , то все КИХ-системы устойчивы. Для БИХ-систем это не всегда верно. Например, если фильтр задан разностным уравнением  $y(n) = y(n - 1) + x(n)$ . Тогда, если на вход подать сигнал, тождественно равный единице, то на выходе будем иметь всё возрастающие значения отклика.

## 2.5 Матрица цифрового фильтра

Запишем действие цифрового фильтра на дискретный сигнал в матричной форме. Отклик  $y = Sx$  на входной сигнал  $x$  вычисляется по формуле  $y(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$ . В частности  $y(0) = \sum_k x(k)h(-k)$ ,  $y(1) = \sum_k x(k)h(1-k)$  и так далее. Тогда, записывая сигналы бесконечными вектор-столбцами  $x = (\dots x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)^T$  для цифрового фильтра получаем равенство

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & h(0) & h(-1) & h(-2) & h(-3) & h(-4) & \ddots \\ \ddots & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & h(-3) & \ddots \\ \ddots & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \ddots \\ \ddots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & \ddots \\ \ddots & h(4) & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Мы получили матрицу фильтра, элементы которой равны  $h_{ij} = h(i-j)$ . Такая матрица называется *теплицевой*.

## 2.6 Физически реализуемые системы

Система  $S$  называется физически реализуемой, если для любого  $N$  и любых сигналов  $x$  и  $y$  таких, что  $x(n) = y(n)$  для любого  $n < N$ , выполняется

$$Sx(k) = Sy(k) \text{ при всех } k < N.$$

Линейная инвариантная к сдвигу система физически реализуема тогда и только тогда, когда её импульсная характеристика  $h$  удовлетворяет условию:

$$h(k) = 0 \text{ при } k < 0.$$

Доказательство состоит из трёх необходимых и достаточных шагов. На первом шаге докажем, что инвариантная к сдвигу система физически реализуема тогда и только тогда, когда для любых сигналов  $x$  и  $y$  таких, что  $x(n) = y(n)$  для любого  $n < 0$ , выполняется

$$Sx(k) = Sy(k) \text{ при } k < 0.$$

Последнее условие для ссылок назовём условием (А).

Необходимость этого утверждения очевидна, так как из того, что данное условие выполняется для всех  $N$  следует, что оно выполняется и для  $N = 0$ .

Для доказательства достаточности возьмём любое  $N$  и любые сигналы  $x$  и  $y$  такие, что  $x(n) = y(n)$  при любом  $n < N$ . Введём новые сигналы  $x_1$ ,

$y_1$  следующим образом: для любого  $n$  по определению  $x_1(n) = x(n + N)$ ,  $y_1(n) = y(n + N)$ . Очевидно, что новые сигналы удовлетворяют условию:  $x_1(n) = y_1(n)$  для любого  $n < 0$ . Но тогда

$$Sx_1(k) = Sy_1(k) \text{ при } k < 0.$$

Так как система инвариантна к сдвигу, то

$$Sx_1(k) = Sx(k + N), \quad Sy_1(k) = Sy(k + N) \text{ при всех } k.$$

Поэтому

$$Sx(n) = Sy(n) \text{ при } n < N,$$

что и требовалось доказать.

На втором шаге докажем, что второй сигнал можно заменить нулевым. Точнее, линейная система удовлетворяет условию (А) тогда и только тогда, когда для любого сигнала  $x$  такого, что  $x(n) = 0$  для любого  $n < 0$ , выполняется

$$Sx(k) = 0 \text{ при } k < 0.$$

Это условие для ссылок назовём условием (Б).

Необходимость условия (Б) очевидна, так как в условии (А) можно взять сигнал  $y$  тождественно равным нулю.

Для доказательства достаточности возьмём любые сигналы  $x$  и  $y$  такие, что  $x(n) = y(n)$  для любого  $n < 0$ . Пусть сигнал  $z = x - y$ . Тогда  $z(n) = 0$  при  $n < 0$ . Поэтому

$$Sz(k) = 0 \text{ при } k < 0$$

или

$$S(x - y)(k) = 0 \text{ при } k < 0.$$

Так как система  $S$  линейна, то

$$Sx(k) - Sy(k) = 0 \text{ при } k < 0,$$

а это значит, что

$$Sx(k) = Sy(k) = 0 \text{ при } k < 0,$$

что требовалось доказать.

На третьем шаге осталось доказать, что условие (Б) выполняется тогда и только тогда, когда импульсная характеристика  $h$  линейной инвариантной к сдвигу системы  $S$  удовлетворяет условию:

$$h(k) = 0 \text{ при } k < 0.$$

Если выполняется условие (Б), то в качестве сигнала  $x$  можно взять в частности единичный импульс  $\delta$ . Но тогда по определению импульсной

характеристики системы и из условия (Б) следует, что  $h(k) = S\delta(k)$  при  $k < 0$ .

Наоборот. Пусть импульсная характеристика  $h$  линейной инвариантной к сдвигу системы  $S$  удовлетворяет условию:  $h(k) = 0$  при  $k < 0$ . Отклик линейной инвариантной к сдвигу системы можно вычислить как свёртку импульсной характеристики и входного сигнала:

$$Sx(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)x(k-j), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Так как импульсная характеристика равна нулю при отрицательных аргументах, то соответствующие слагаемые можно не учитывать в сумме

$$Sx(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)x(k-j), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если  $k < 0$ , то и  $k-j < 0$  при  $j \geq 0$ . А так как входной сигнал при отрицательных аргументах равен нулю  $x(k-j) = 0$ , то все слагаемые в сумме равны нулю и, следовательно,  $Sx(k) = 0$  при  $k < 0$ .

Теорема доказана.

Физически реализуемую систему можно в матричной форме представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & \ddots \\ \ddots & h(4) & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## 2.7 Частотная характеристика системы

Исследуем отклик системы  $S$  на входной сигнал

$$x(n) = Ae^{i\omega n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $A \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $i^2 = -1$ .

Так как система линейная и инвариантная к сдвигу, то её отклик можно вычислять как свёртку

$$Sx(k) = (h * x)(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(k-m).$$

После подстановки входного сигнала

$$Sx(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)Ae^{i\omega(k-m)} = Ae^{i\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i\omega m}.$$

Обозначим

$$H(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i\omega m}.$$

Функция  $H(\omega)$  (если существует) называется частотной характеристикой системы  $S$ . Таким образом, частотная характеристика системы (фильтра) равна спектральной функции импульсной характеристики этой системы. В том важном случае, когда  $h \in \ell_1$ , частотная характеристика  $H(\omega)$  является непрерывной,  $2\pi$ -периодической функцией.

Тогда

$$Sx(k) = AH(\omega)e^{i\omega k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует, что линейная и инвариантная к сдвигу система гармонический сигнал переводит в гармонический сигнал той же частоты. Меняется амплитуда и фаза сигнала. Модуль  $|H(\omega)|$  называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы,  $\arg H(\omega)$  называется фазово-частотной характеристикой (ФЧХ) системы.

Пусть теперь сигнал на входе является вещественным гармоническим. В этом случае естественно считать, что импульсная характеристика тоже является вещественной. Хотя на вход системы можно подавать и комплексные сигналы. Зададим рассматриваемый сигнал формулой

$$x(k) = A \cos(\omega k + \varphi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ . Сигнал  $x$  можно по формуле (5) представить в виде

$$x(k) = \frac{A}{2}(e^{i(\omega k + \varphi)} + e^{-i(\omega k + \varphi)}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$x(k) = \frac{Ae^{i\varphi}}{2}e^{i\omega k} + \frac{Ae^{-i\varphi}}{2}e^{i(-\omega)k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На выходе системы в силу её линейности получим отклик

$$Sx(k) = \frac{A}{2}e^{i\varphi} H(\omega)e^{i\omega k} + \frac{A}{2}e^{-i\varphi} H(-\omega)e^{-i\omega k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

То, что импульсная характеристика системы является вещественной, приводит к следующему равенству

$$\overline{H(\omega)} = \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-ik\omega}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h(k)} \overline{e^{-ik\omega}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{ik\omega} = H(-\omega).$$

Обозначим АЧХ и ФЧХ системы соответственно  $|H(\omega)|$  и  $\psi(\omega) = \arg H(\omega)$  так, что  $H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\psi(\omega)}$ . Равенство  $\overline{H(\omega)} = H(-\omega)$  означает, что  $|H(\omega)| = |H(-\omega)|$  и  $\arg H(\omega) = -\arg H(-\omega)$  с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ . Тогда  $H(-\omega) = |H(\omega)| e^{-i\psi(\omega)}$  и

$$Sx(k) = \frac{A}{2} e^{i\varphi+i\psi(\omega)} |H(\omega)| e^{i\omega k} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi-i\psi(\omega)} |H(\omega)| e^{-i\omega k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$Sx(k) = \frac{A|H(\omega)|}{2} (e^{i(\varphi+\psi(\omega)+\omega k)} + e^{-i(\varphi+\psi(\omega)+\omega k)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формула (5) приводит к равенству

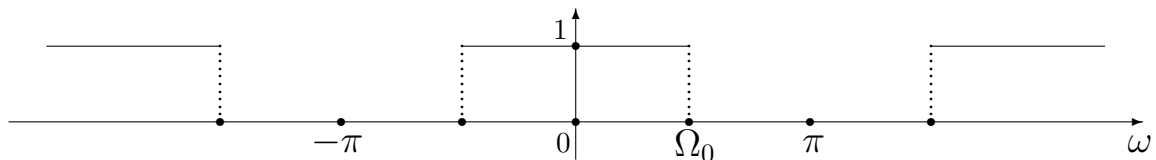
$$Sx(k) = A|H(\omega)| \cos(\varphi + \psi(\omega) + \omega k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, линейная инвариантная к сдвигу система дискретный гармонический сигнал переводит в гармонический той же частоты. Меняется амплитуда и фаза сигнала.

**Пример.** Найти импульсную характеристику идеального фильтра низких частот, частотная характеристика которого на основном периоде  $[-\pi; \pi]$  равна

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| \leq \Omega_0; \\ 0, & \text{если } \Omega_0 \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Построить график этой функции не составляет труда:



Найдём импульсную характеристику системы. Так как

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{i\omega k} d\omega,$$

то, учитывая вид частотной характеристики  $H(\omega)$ , получим

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} e^{i\omega k} d\omega.$$

Тогда

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega k}}{ik} \Big|_{-\Omega_0}^{\Omega_0} = \frac{\sin(\Omega_0 k)}{\pi k},$$

если  $k \neq 0$ . При  $k = 0$  легко видно, что  $h(0) = \Omega_0/\pi$ . Таким образом, идеальный фильтр низких частот является БИХ - системой, причём она не является физически реализуемой.

## 2.8 Разностные уравнения и цифровые фильтры

Во многих случаях цифровой фильтр можно задавать с помощью разностного уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$y(n) = \sum_{j=1}^M a_j y(n-j) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k), \quad a_M \neq 0. \quad (33)$$

Если  $M = 0$ , то фильтр называется нерекурсивным, и, наоборот, если  $M > 0$ , то фильтр называется рекурсивным. То, что коэффициенты  $a_j$  — постоянные, означает их независимость от  $n$ . Уравнение (33) позволяет вычислять последовательно значения отклика системы на входной сигнал. Такое качество системы удобно для работы в реальном времени. Можно, конечно, рассматривать и несколько более общую систему, заданную с помощью разностного уравнения

$$y(n) = \sum_{j=1}^M a_j y(n-j) + \sum_{k=-R}^N b_k x(n-k), \quad a_M \neq 0. \quad (34)$$

В этом случае вычисление значения  $y(n)$  отстаёт от поступающего в систему очередного значения входного сигнала на  $R$  тактов. Такая задержка бывает неприемлемой, особенно в том случае, когда не терпится поскорее получить отклик системы. Выход один, используйте только цифровой фильтр (33). А если вечером все равно делать нечего и целая ночь впереди, то самое время запустить рекурсивный фильтр (34) на обработку поступивших за день сигналов.

**Пример.** Найти отклик системы, заданной разностным уравнением

$$y(n) = 2x(n) - 3y(n-1). \quad (35)$$

с начальным условием  $y(-1) = 0$  и входным сигналом  $x(n) = n^3 + 1$ .

Можно находить значения отклика системы, последовательно вычисляя по формуле (35):

$$\begin{aligned} y(0) &= 2x(0) - 3y(-1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2, \\ y(1) &= 2x(1) - 3y(0) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -2, \\ y(2) &= 2x(2) - 3y(1) = 2 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 24, \\ y(3) &= 2x(3) - 3y(2) = 2 \cdot 28 - 3 \cdot 24 = -16, \end{aligned}$$

и так далее.

Так хорошо поступать, будучи компьютером. Однако в некоторых случаях необходимо найти общее решение разностного уравнения в более удобной для дальнейшего анализа форме. Методы решения таких уравнений

очень похожи на методы решений дифференциальных уравнений (и эта похожесть не случайна). Поэтому анализ и методы решения разностных уравнений рассматривается (чаще не рассматривается) в курсе дифференциальных уравнений. Тем не менее далее будет дан Поэтому изложим лишь рецепт получения решения. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения

$$y(n) = \sum_{j=1}^M a_j y(n-j) \quad (36)$$

и частного решения неоднородного уравнения (34). Чтобы найти общее решение однородного уравнения (36) нужно найти *ненулевые* корни уравнения

$$z^n = \sum_{j=1}^M a_j z^{n-j}, \quad (37)$$

что равносильно (нужно уравнение (37) поделить на  $z^{n-M}$ ) нахождению всех корней характеристического уравнения

$$z^M - \sum_{j=1}^M a_j z^{M-j} = 0. \quad (38)$$

Каждому корню  $z = \alpha$  уравнения (38) в общем решении однородного уравнения (36) отвечает слагаемое вида

$$\alpha^n \sum_{j=0}^{k-1} C_j n^j$$

с неопределёнными коэффициентами  $C_j$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , где  $k$  — это кратность корня  $\alpha$  в характеристическом уравнении (37). Неопределённые коэффициенты определяются с помощью начальных условий. Таким образом, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  — все, в общем случае комплексные, ненулевые корни уравнения (37) с кратностями  $k_1, \dots, k_l$ , то общее решение однородного разностного уравнения (36) имеет вид

$$y(n) = \sum_{s=1}^l \alpha_s^n \sum_{j=0}^{k_s-1} C_{j,s} n^j. \quad (39)$$

Частное решение обычно ищется в том же виде, в каком задан входной сигнал и находится подстановкой в разностное уравнение (34).

Вернёмся к примеру (35). Однородное уравнение имеет вид:

$$y(n) + 3y(n-1) = 0.$$



Его характеристическое уравнение  $z^n + 3z^{n-1} = 0$  имеет один простой ненулевой корень  $z = -3$ . Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0(n) = C_1(-3)^n.$$

Частное решение будем искать в том же виде, в каком задан входной сигнал:

$$y_1(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D.$$

Подставляя частное решение в уравнение (35), получим

$$An^3 + Bn^2 + Cn + D = 2(n^3 + 1) - 3A(n-1)^3 - 3B(n-1)^2 - 3C(n-1) - 3D.$$

После разложения по степеням  $n$  и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A &= 2 - 3A, \\ B &= 9A - 3B, \\ C &= -9A + 6B - 3C, \\ D &= 2 + 3A - 3B + 3C - 3D, \end{aligned}$$

решая которую находим, что

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{9}{8}; \quad C = \frac{9}{16}; \quad D = \frac{29}{64}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (35) имеет вид

$$y(n) = C_1(-3)^n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{9}{8}n^2 + \frac{9}{16}n + \frac{29}{64}.$$

Используем теперь начальное условие. Оно даёт

$$y(-1) = C_1(-3)^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{9}{8} - \frac{9}{16} + \frac{29}{64} = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{99}{64}.$$

Окончательно, общее решение неоднородного разностного уравнения (35) имеет вид

$$y(n) = \frac{99}{64}(-3)^n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{9}{8}n^2 + \frac{9}{16}n + \frac{29}{64}.$$

**Пример.** Найти импульсную характеристику  $h$  физически реализуемого рекурсивного фильтра

$$y(n) = \frac{3y(n-1)}{2} - \frac{y(n-3)}{2} + x(n) - \frac{x(n-1)}{2}. \quad (40)$$

По определению отклик системы равен импульсной характеристике, если у вход системы подать единичный импульс. Таким образом, если  $x = \delta$ , то  $y = h$ . Вычислим несколько значений импульсной характеристики  $h$ . Так как система физически реализуема, то при  $n < 0$  все  $h(n) = 0$ . Далее

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{3}{2}h(-1) - \frac{1}{2}h(-3) + \delta(0) - \frac{1}{2}\delta(-1) = 1, \\ h(1) &= \frac{3}{2}h(0) - \frac{1}{2}h(-2) + \delta(1) - \frac{1}{2}\delta(0) = 1, \\ h(2) &= \frac{3}{2}h(1) - \frac{1}{2}h(-1) = \frac{3}{2}, \\ h(3) &= \frac{3}{2}h(2) - \frac{1}{2}h(0) = \frac{7}{4}, \\ h(4) &= \frac{3}{2}h(3) - \frac{1}{2}h(1) = \frac{17}{8}. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае при  $n > 1$  разностное уравнение (40) становится однородным, так как  $x(n) = x(n-1) = 0$ . Характеристическое уравнение однородного разностного уравнения из (40) имеет вид

$$z^n - \frac{3}{2}z^{n-1} + \frac{1}{2}z^{n-3} = 0 \Leftrightarrow 2z^n - 3z^{n-1} + z^{n-3} = 0,$$

равносильное для ненулевых значений  $z$  уравнению

$$2z^3 - 3z^2 + 1 = 0.$$

Корни последнего уравнения легко найти, например, подбором. Их два, первый корень  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$  простой и второй корень  $\alpha_2 = 1$  кратности 2.

Тогда общее решение однородного уравнения (при  $n > 1$ ) имеет вид

$$h(n) = C_1 + C_2n + C_3\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \quad (41)$$

Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  найдем, используя начальные условия. Так как  $h(0) = 1$ ,  $h(1) = 1$  и  $h(2) = 3/2$ . то, подставляя последовательно  $n = 0, 1, 2$  в (41), получим

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 1, \\ C_1 + C_2 - \frac{1}{2}C_3 &= 1, \\ C_1 + 2C_2 + \frac{1}{4}C_3 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений, получим  $C_1 = 7/9$ ,  $C_2 = 1/3$ ,  $C_3 = 2/9$ . Таким образом, импульсная характеристика равна

$$h(n) = \frac{7}{9} + \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Остался не до конца проясненным вопрос о выборе начальных значений для определения коэффициентов  $C_j$ . Здесь важно то, что последнее по списку начальное значение вычисляется через предыдущие с использованием однородного разностного уравнения. Можно было брать в нашем случае например наборы  $h(1), h(2), h(3)$  или  $h(2), h(3), h(4)$  и т.д.

## 2.9 Z-преобразование

Для любой последовательности  $x$  можно построить следующий ряд Лорана

$$X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция  $X(z)$  называется  $z$ -преобразованием последовательности (сигнала)  $x$ . Из курса анализа функций комплексного переменного известно, что функция  $X(z)$  аналитична в кольце  $r < |z| < R$ . Передаточной функцией системы называется  $z$ -преобразование её частотной характеристики

$$H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)z^{-k}.$$

Имеется простая связь между частотной характеристикой системы и её передаточной функцией. Если передаточная функция  $H(z)$  существует на единичной окружности с центром в нуле, то частотная характеристика системы имеет вид  $H(e^{i\omega})$ . Поэтому передаточную функцию системы можно считать некоторым обобщением частотной характеристики.

Рассмотрим простейшие свойства  $z$ -преобразования.

1.  $z$ -преобразование линейно. Это означает, что, если последовательности  $x, y, u$  удовлетворяют условию  $u = \alpha x + \beta y$ , то  $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ .

2. Если последовательность  $y$  получена из последовательности  $x$  сдвигом на  $k$ , то есть  $y = \tau^k x$ , то  $Y(z) = z^{-k} X(z)$ .

Действительно,

$$Y(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} y(j)z^{-j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(j-k)z^{-j}.$$

После замены  $l = j - k$  получим

$$Y(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} x(l)z^{-l-k} = z^{-k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} x(l)z^{-l} = z^{-k} X(z).$$

3. Если последовательность  $u$  равна свёртке последовательностей  $x$  и  $y$ , то  $U(z) = X(z)Y(z)$ . Можно сказать, что свёртка  $z$ -преобразованием переводится в произведение.

Это свойство сформулировано другими словами и доказано в 9 свойстве свёртки.

4.  $z$ -преобразование обратимо. Исходную последовательность можно восстановить по формуле

$$x(j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} X(z) z^{j-1} dz,$$

где  $r < \rho < R$ .

$z$ -преобразование удобно применять для анализа цифровых фильтров, заданных разностным уравнением (33). Если его применить к левой и правой части уравнения с использованием первого и второго свойства, то получим

$$Y(z) = \sum_{j=1}^M a_j z^{-j} Y(z) + \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} X(z).$$

$$Y(z) \left( 1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j} \right) = X(z) \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}.$$

Функцию

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}}.$$

называют передаточной функцией (синонимы: функция передачи, системная функция дискретного фильтра).

Обозначим передаточную функцию через

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}}.$$

Расчёт характеристик фильтра или построение фильтра с заданными свойствами удобно вести с использованием функции  $H(z)$  (см. [4]). Отметим, что  $Y(z) = H(z)X(z)$ .

## 2.10 Задания для самопроверки

1. На вход системы подаётся сигнал  $x(n) = 2 \cos(n) + 3 \sin(2n + 1) - 4 \sin(3n + 2)$ , на выходе системы получаем сигнал  $y(n) = 4 \cos(n + 1) + 2 \sin(3n + 2)$ . Может ли быть система линейной?

2. На вход линейной системы подается сигнал  $x(n) = 2 \cos(n) + 4 \sin(3n + 2)$ . Какой сигнал следует ожидать на выходе?

3. а) Найти импульсную характеристику идеального фильтра высоких частот, частотная характеристика которого на основном периоде  $[-\pi; \pi]$  равна

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{если } \Omega_0 \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

б) Найти импульсную характеристику идеального полосового фильтра частотная характеристика которого на основном периоде  $[-\pi; \pi]$  равна

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2; \\ 0, & \text{при остальных значениях.} \end{cases}$$

в) Найти импульсную характеристику идеального режекторного фильтра. частотная характеристика которого на основном периоде  $[-\pi; \pi]$  равна

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2; \\ 1, & \text{при остальных значениях.} \end{cases}$$

4. Найти импульсную характеристику фильтров, заданных следующими разностными уравнениями

а)  $y(k) = 3y(k-1) + x(k) + x(k-1), k \in \mathbb{Z};$

б)  $y(k) = -\frac{1}{6}y(k-1) - \frac{1}{6}y(k-2) + x(k), k \in \mathbb{Z};$

в)  $y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + \frac{1}{2}x(k), k \in \mathbb{Z};$

г)  $y(k) = y(k-2) + x(k) - x(k-1), k \in \mathbb{Z};$

д)  $y(k) = -y(k-2) + x(k-1), k \in \mathbb{Z}.$

5. Найти разностное уравнение, задающее цифровой фильтр с импульсной характеристикой

а)  $h(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 < k < M, \\ 0 & \text{при } k < 0 \text{ и } k > M - 1; \end{cases}$

б)  $h(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k > -1, \\ 0 & \text{при } k < 0; \end{cases}$

в)  $h(k) = \begin{cases} (0,5)^k & \text{при } k > -1, \\ 0 & \text{при } k < 0; \end{cases}$

6. Найти передаточную функцию системы, импульсная характеристика которой равна

а) единичной ступеньке  $u;$

б) единичному импульсу  $\delta;$

в)  $h(k) = 0$  при  $k < 0$  и  $h(k) = a^k$  при остальных  $k.$

7. Найти импульсную характеристику системы с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 - 2z + 3z^2 - 4z^3}{z^4}.$$

8. Найти разностное уравнение, задающее систему, если передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \frac{4 - 3z + 5z^3}{z^3 - 2}.$$

## 2.11 Тест

1. Система действует по правилу:  $y(n) = x(-n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Система является

- а) линейной и инвариантной к сдвигу;
- б) нелинейной и не инвариантной к сдвигу;
- в) линейной, но не инвариантной к сдвигу;
- г) инвариантной к сдвигу, но нелинейной;
- д) вообще не системой.

2. Какие из трёх систем с импульсными характеристиками

$$h_1(n) = 2^{-n}, \quad h_2(n) = n^2, \quad h_3(n) = n^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

устойчивы?

- а) первая;
- б) все устойчивы;
- в) первая и вторая;
- г) вторая;
- д) вторая и третья.

3. Рекурсивный фильтр, заданный разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 2x(n) \quad n \in \mathbb{Z},$$

с начальными условиями  $y(-1) = 0$ ,  $y(0) = 2$  является

- а) устойчивым и физически реализуемым;
- б) неустойчивым, но физически реализуемым;
- в) неустойчивым и не физически реализуемым;
- г) устойчивым, но не физически реализуемым;
- д) не фильтром.

### 3 Преобразование Фурье дискретных сигналов

#### 3.1 Преобразование Фурье периодических сигналов

Пусть  $N$  — натуральное число. Обозначим через  $\tilde{\mathbb{C}}^N$  множество всех периодических комплексных последовательностей с периодом, равным  $N$ . Легко проверяется, что это множество с обычными операциями сложения последовательностей и умножения последовательности на комплексное число является линейным комплексным пространством. Точно также вводится вещественное линейное пространство  $\tilde{\mathbb{R}}^N$  всех периодических вещественных последовательностей с периодом, равным  $N$ . Множество  $\tilde{\mathbb{R}}^N$  можно рассматривать как подмножество (но не как подпространство) множества  $\tilde{\mathbb{C}}^N$ . В  $\tilde{\mathbb{C}}^N$  выберем  $N$  последовательностей  $\tilde{\mathbf{e}}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k(n) = e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = \omega^{-kn}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где обозначено  $\omega = \omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ . То, что последовательности  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  принадлежат  $\tilde{\mathbb{C}}^N$ , следует из их периодичности с периодом  $N$ :

$$\tilde{\mathbf{e}}_k(n+N) = e^{\frac{2\pi i}{N}k(n+N)} = e^{\frac{2\pi i}{N}kn} e^{2\pi ik} = e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = \tilde{\mathbf{e}}_k(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь использовалось то, что для любого целого  $k$  имеет место равенство  $e^{2\pi ik} = 1$ . Докажем, что этот набор из  $N$  последовательностей образует базис в линейном пространстве  $\tilde{\mathbb{C}}^N$ . Для этого достаточно доказать, что любую последовательность  $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{C}}^N$  можно разложить единственным образом в линейную комбинацию последовательностей  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{N-1}$ . Таким образом, докажем, что из равенства

$$\tilde{x} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (42)$$

можно выразить, причём единственным образом, коэффициенты  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ . Для этого вычислим сумму

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \omega^{-nm}. \quad (43)$$

Равенство (42) можно записать для  $n$ -го элемента последовательности

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \tilde{\mathbf{e}}_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \omega^{kn}. \quad (44)$$

Подставим (44) в (43), тогда

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \omega^{kn} \omega^{-nm} \quad (45)$$

или

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \omega^{n(k-m)}. \quad (46)$$

После перемены порядка суммирования получим

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(k-m)}. \quad (47)$$

Попытаемся внутреннюю сумму в (47) вычислить, держа в голове формулу для суммы геометрической прогрессии

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

если  $q \neq 1$  и  $S_N = N$ , если  $q = 1$ . Тогда, полагая, что  $q = W^{k-m}$ , и зная, что  $W^{Nl} = 1$  лишь для любого целого  $l$ , получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{(k-m)n} = \begin{cases} N, & \text{если } k - m = Nl, l \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{если } k - m \text{ не кратно } N. \end{cases} \quad (48)$$

Тогда, возвращаясь к (47),

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \begin{cases} N, & \text{если } k - m = Nl, l \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{если } k - m \text{ не кратно } N. \end{cases} \quad (49)$$

Это значит, что в последней сумме лишь одно быть может ненулевое слагаемое, соответствующее  $k = m + Nl$  для некоторого  $l$ . Но тогда

$$X(m) = \frac{1}{N} X_{m+Nl} N = X_{m+Nl}, \quad (50)$$

где  $l$  подбирается так, чтобы  $0 \leq m + Nl \leq N - 1$ . Следовательно, для каждого  $\tilde{x}$  коэффициенты  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  определяются единственным образом и совпадают с элементами одного периода последовательности  $\tilde{X}$ . Подытожим доказанное. Формула (43) позволяет по последовательности  $\tilde{x}$  вычислить все элементы последовательности  $\tilde{X}$ , а формула (44) с учётом равенств (50) приводит к формуле

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \omega^{kn}, \quad (51)$$

позволяющей по последовательности  $\tilde{X}$  вычислять все элементы последовательности  $\tilde{x}$ .



### 3.2 Свойства преобразования Фурье периодических сигналов

Всюду ниже  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  есть преобразование Фурье соответственно сигналов  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Аналогичное правило будем применять и для других букв.

1. Преобразование Фурье является линейным обратимым оператором, действующим из  $\tilde{\mathbb{C}}^N$  в  $\tilde{\mathbb{C}}^N$ . Доказательство несложно. Докажите это свойство самостоятельно. Заметим лишь, что этот линейный оператор можно задать в матричном виде. Пусть  $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$  и матрица

$$\tilde{W}_N = \left( \begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Основной} \\ \text{период} \end{array}$$

Тогда, если обозначить периодические сигналы

$$\tilde{V} = \left( \begin{array}{c} \vdots \\ V_{N-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_0 \\ \vdots \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ V_{N-1} \\ V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_0 \\ \vdots \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Основной} \\ \text{период,} \end{array} \left\{ \tilde{v} = \left( \begin{array}{c} \vdots \\ v_{N-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ V_{N-1} \\ \vdots \end{array} \right), \right.$$

то

$$\tilde{V} = \tilde{W}_N \tilde{v} \quad \text{и} \quad \tilde{v} = \tilde{W}_N^{-1} \tilde{V},$$

где матрица  $\tilde{W}_N^{-1}$  получается из матрицы  $\tilde{W}_N$  заменой  $\omega$  на  $\omega^{-1}$ .

2. Если  $\tilde{X} = \tilde{W}_N \tilde{x}$ ,  $\tilde{Y} = \tilde{W}_N \tilde{y}$  и  $\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n + n_0)$  для некоторого фиксированного  $n_0 \in \mathbb{Z}$  и любого  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $\tilde{Y}(m) = \tilde{X}(m)\omega^{n_0 m}$  для любого  $m \in \mathbb{Z}$ .

Действительно, так как по определению

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n)\omega^{nm},$$

то

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n + n_0)\omega^{nm}.$$

После замены индекса суммирования  $n := n + n_0$

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=n_0}^{N+n_0-1} \tilde{x}(n)\omega^{(n-n_0)m}.$$

Так как для любой  $N$ -периодической последовательности  $\tilde{u}$  справедливо легко проверяемое равенство

$$\sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} \tilde{u}(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}(k),$$

то

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{(n-n_0)m} = \omega^{-n_0 m} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{nm} = \omega^{-n_0 m} \tilde{X}(m),$$

3. Если для некоторого фиксированного  $m_0 \in \mathbb{Z}$  и любого  $n \in \mathbb{Z}$  имеет место равенство  $\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n)\omega^{m_0 n}$ , то  $\tilde{Y}(m) = \tilde{X}(m + m_0)$  для любого  $m \in \mathbb{Z}$ .

Действительно, так как

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n)\omega^{nm},$$

то

$$\tilde{Y}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{m_0 n}\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{n(m_0+m)} = \tilde{X}(m + m_0).$$

4. Периодический сигнал  $\tilde{x}$  является вещественным тогда и только тогда, когда  $\tilde{X}(m) = \overline{\tilde{X}(-m)}$  для любого  $m \in \mathbb{Z}$ .

Действительно, учитывая то, что комплексно-сопряжённое от суммы (произведения) равно сумме (произведению) комплексно-сопряжённых, получим

$$\overline{\tilde{X}(-m)} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{-nm}} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\tilde{x}(n)} \overline{\omega^{-nm}}.$$

Учтём, что для вещественного сигнала  $\overline{\tilde{x}} = \tilde{x}$ , а для  $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$  верно равенство  $\overline{\omega^{-nm}} = \omega^{nm}$ . Тогда

$$\overline{\tilde{X}(-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{nm} = \tilde{X}(m).$$

Наоборот, так как для любого сигнала  $\tilde{x}$

$$\overline{\tilde{X}(-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\tilde{x}(n)\omega^{nm}}, \quad \tilde{X}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{nm},$$

то получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{N-1} \overline{\tilde{x}(n)\omega^{nm}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\omega^{nm},$$

которое приводит к равенству  $\overline{\tilde{x}(n)} = \tilde{x}(n)$ .

5. Если сигнал  $\tilde{y}$  равен действительной части периодического сигнала  $\tilde{x}$ , сигнал  $\tilde{z}$  равен мнимой части периодического сигнала  $\tilde{x}$ , то

$$\tilde{Y}(m) = \frac{\tilde{X}(m) + \overline{\tilde{X}(-m)}}{2}, \quad \tilde{Z}(m) = \frac{\tilde{X}(m) - \overline{\tilde{X}(-m)}}{2i}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (52)$$

Действительно, учитывая свойство 1 о линейности преобразования Фурье, получим

$$\tilde{X}(m) = \tilde{Y}(m) + i\tilde{Z}(m) \text{ для любого } m \in \mathbb{Z}. \quad (53)$$

Тогда

$$\overline{\tilde{X}(-m)} = \overline{\tilde{Y}(-m) - i\tilde{Z}(-m)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Но по предыдущему свойству имеем

$$\overline{\tilde{X}(-m)} = \tilde{Y}(m) - i\tilde{Z}(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (54)$$

Складывая и вычитая (53) и (54), получим (52).

### 3.3 Свёртка периодических последовательностей

Для любых периодических (ненулевых) последовательностей нельзя ввести обычную свёртку ввиду того, что ряд (31) расходится. Важным свойством свёртки является то, что её спектральная функция равна (поточечно) произведению спектральных функций сворачиваемых последовательностей. Найдём аналог свёртки в случае периодических последовательностей с учётом этого свойства. Для этого рассмотрим три периодические последовательности  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{\mathbb{C}}^N$ , преобразования Фурье которых, как обычно, обозначим  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  соответственно. Пусть последняя последовательность равна поточечному произведению двух предыдущих. Это означает,

что

$$\tilde{Z}(m) = \tilde{X}(m)\tilde{Y}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Попытаемся вывести формулу, по которой последовательность  $\tilde{z}$  непосредственно вычисляется через последовательности  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ .

$$\tilde{z}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{Z}(m)\omega^{-km},$$

$$\tilde{z}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}(m)\tilde{Y}(m)\omega^{-km},$$

$$\tilde{z}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}(j)\omega^{jm} \right) \left( \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{y}(l)\omega^{lm} \right) \omega^{-km},$$

Меняя порядок суммирования, после упрощения получим

$$\tilde{z}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}(j) \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{y}(l) \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{m(j+l-k)}.$$

Внутреннюю сумму легко найти как сумму геометрической прогрессии с учётом равенства  $\omega^N = 1$

$$\sigma(j, l, k) = \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{m(j+l-k)} = \begin{cases} \frac{1-\omega^{N(j+l-k)}}{1-\omega^{(j+l-k)}}, & \text{если } j+l-k \text{ не кратно } N \\ N & \text{если } j+l-k \text{ кратно } N. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1-\omega^{N(j+l-k)}}{1-\omega^{(j+l-k)}} = 0 \quad \text{для любого } j+l-k,$$

то в сумме с индексом суммирования  $l$  только одно слагаемое отлично от нуля. А именно то слагаемое, при котором  $j+l-k$  кратно  $N$ . Так как все последовательности периодичны с периодом  $N$ , то можно считать, что  $j+l-k = 0$ . Это значит, в этой сумме останется только одно слагаемое при  $l = k - j$ :

$$\tilde{z}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}(j)\tilde{y}(k-j).$$

Будем говорить, что сигнал  $\tilde{z}$  есть циклическая свёртка периодических сигналов  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Циклическая свёртка будет обозначаться  $\tilde{z} = \tilde{x} \circledast \tilde{y}$ .

### 3.4 Дискретное преобразование Фурье над полем комплексных чисел

Рассмотрим базис линейного пространства  $\tilde{\mathbb{C}}^N$ , состоящий из  $N$   $N$ -периодических сигналов следующего вида,

$$e_k = (\dots, \underbrace{0, \dots, 0, \overbrace{1}^{k\text{-элемент}}, 0, \dots, 0}_{\text{Основной период}}, \underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{\text{Основной период}}, \dots)$$

для  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Любой  $N$ -периодический сигнал  $\tilde{v}$  можно разложить по этому базису

$$\tilde{v} = \sum_{j=0}^{N-1} v(j)e_j.$$

Пусть  $v = (v(0), v(1), \dots, v(N-1)) \in \mathbb{C}^N$  — координатный вектор, состоящий из координат сигнала  $\tilde{v}$  в данном базисе.

Дискретное преобразование Фурье порядка  $N$  для  $v \in \mathbb{C}^N$  определяется по формуле

$$V(k) = \sum_{l=0}^{N-1} v(l)e^{-\frac{2\pi i}{N}kl}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Обратное дискретное преобразование Фурье для вектора  $V \in \mathbb{C}^N$  находится по формуле

$$v(l) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} V(k)e^{\frac{2\pi i}{N}kl}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Пусть, как и раньше,  $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье можно записать в виде

$$V(k) = \sum_{l=0}^{N-1} v(l)\omega^{kl}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (55)$$

$$v(l) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} V(k)\omega^{-kl}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (56)$$

Пусть матрица дискретного преобразования Фурье

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{V} = W_N \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{v} = W_N^{-1} \mathbf{V}, \quad (57)$$

где матрица обратного дискретного преобразования Фурье имеет вид

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{1-N} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{2(1-N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{1-N} & \omega^{2(1-N)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, дискретное преобразование Фурье является линейным оператором, действующим в  $\mathbb{C}^N$  по правилу (57). Его можно трактовать и несколько иначе. А именно, как преобразование Фурье периодических сигналов, ссуженных на один период. Для того, чтобы дать точные формулировки, введём определения. Через  $\Phi$  обозначим действующий из  $\mathbb{C}^N$  в  $\mathbb{C}^N$  оператор сужения сигнала на основной период:

$$\Phi(\tilde{v}) = (v(0), v(1), \dots, v(N-1)).$$

Тогда  $\Phi^{-1}$  есть оператор периодического продолжения вектора  $v$ . Если через  $\tilde{F}$  обозначить преобразование Фурье периодических последовательностей, а через  $F$  обозначить дискретное преобразование Фурье, то следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{C}}^N & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{\mathbb{C}}^N \\ \Phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{C}^N & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^N \end{array}$$

Это значит, что  $F = \Phi \tilde{F} \Phi^{-1}$ . Таким образом, дискретное преобразование Фурье строится по изоморфизму  $\Phi$  из преобразования Фурье периодических последовательностей. Это значит, что основные свойства наследуются. Однако есть один нюанс. Аргументы периодических сигналов можно безбоязненно складывать и вычитать. При этом аргумент может перемещаться из одного периода в другой. Для векторов этого делать нельзя, так как значения аргумента ограничены. Но сложения и вычитания аргументов по модулю  $N$  равносильны сложению и вычитанию аргументов для периодических последовательностей. Поэтому введём следующие определения: для целых чисел  $0 \leq k < N$ ,  $0 \leq l < N$  обозначим циклическую разность

$$k \ominus_N l = \begin{cases} k - l & \text{если } k \geq l, \\ k - l + N & \text{если } k < l, \end{cases}$$

и циклическую сумму

$$k \oplus_N l = \begin{cases} k + l & \text{если } k + l < N, \\ k + l - N & \text{если } k + l > N - 1. \end{cases}$$

Перечислим свойства без доказательств, так как они очевидны.

1. Если  $V = W_N v$ ,  $U = W_N u$  и  $u(n) = v(n \oplus_N n_0)$  для некоторого фиксированного  $n_0 \in \mathbb{Z}$  и любого  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , то  $U(m) = V(m)\omega^{n_0 m}$  для любого  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ .

3. Если для некоторого фиксированного  $m_0 \in \mathbb{Z}$  и любого  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  имеет место равенство  $u(n) = v(n)\omega^{m_0 n}$ , то  $U(m) = V(m \oplus_N m_0)$  для любого  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ .

4. Вектор  $v$  является вещественным тогда и только тогда, когда  $V(m) = \overline{V(N - m)}$  для любого  $m = 1, \dots, N - 1$  и  $V(0) \in \mathbb{R}$ .

5. Если вектор  $u$  равен действительной части вектора  $x$ , вектор  $v$  равен мнимой части вектора  $x$ , то

$$U(m) = \frac{X(m) + \overline{X(N - m)}}{2}, \quad V(m) = \frac{X(m) - \overline{X(N - m)}}{2i} \quad (58)$$

для  $m = 1, \dots, N - 1$  и  $U(0)$  равно действительной части  $X(0)$ ,  $V(0)$  равно мнимой части  $X(0)$ .

Рассмотрим частные случаи при маленьких  $N$ . Если  $N = 2$ , то дискретное преобразование Фурье определяется равенствами

$$\begin{aligned} V(0) &= v(0) + v(1), \\ V(1) &= v(0) - v(1), \end{aligned}$$

так как в этом случае  $\omega = -1$ . Если  $N = 3$ , то

$$\begin{aligned} V(0) &= v(0) + v(1) + v(2), \\ V(1) &= v(0) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v(1) - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v(2), \\ V(2) &= v(0) - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v(1) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v(2), \end{aligned}$$

так как  $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Для  $N = 4$   $\omega = -i$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} V(0) &= v(0) + v(1) + v(2) + v(3), \\ V(1) &= v(0) - iv(1) - v(2) + iv(3), \\ V(2) &= v(0) - v(1) + v(2) - v(3), \\ V(3) &= v(0) + iv(1) - v(2) - iv(3). \end{aligned}$$

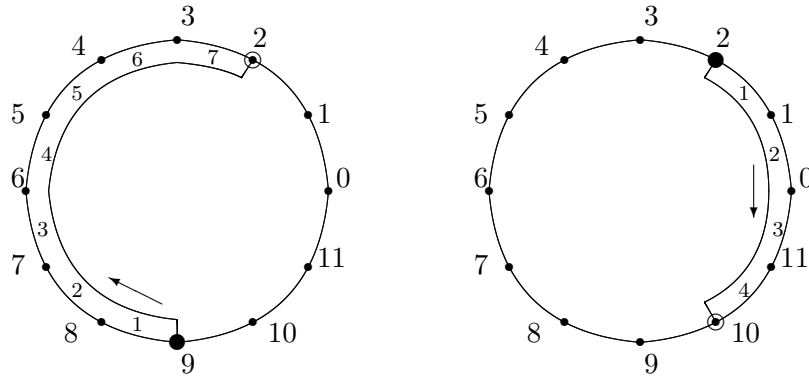
Заметим попутно, что дискретное преобразование Фурье второго порядка требует два сложения и не требует умножений для своего вычисления. Для четвёртого порядка требуется двенадцать сложений и не требуется умножений, так как умножение на мнимую единицу просто с точностью до знака меняет местами действительную и мнимую часть числа. Можно ли уменьшить число сложений?

### 3.5 Циклическая свёртка

Для целых чисел  $0 \leq k < N$ ,  $0 \leq l < N$  рассмотрим циклическую разность

$$k \underset{N}{\ominus} l = \begin{cases} k - l & \text{если } k \geq l; \\ k - l + N & \text{если } k < l. \end{cases}$$

Её геометрически можно трактовать следующим образом. Если обычная разность  $k - l$  двух целых чисел получается с помощью сдвига точки  $k$  влево на  $l$  единиц на числовой прямой, то циклическая разность  $k \underset{N}{\ominus} l$  двух чисел  $0 \leq k < N$ ,  $0 \leq l < N$  получается с помощью сдвига точки  $k$  в отрицательном направлении на  $l$  единиц на числовой окружности. Например, для  $N = 12$  разность  $9 \underset{12}{\ominus} 7$  получается сдвигом точки 9 по часовой стрелке на семь единиц. После внимательного, напряжённого и тщательного анализа получаем точку два. Разность  $2 \underset{12}{\ominus} 4$  получается сдвигом точки два на четыре единицы по часовой стрелке. Это изображено на втором рисунке. Получаем точку 10.



Таким образом  $9 \underset{12}{\ominus} 7 = 2$ ,  $2 \underset{12}{\ominus} 4 = 10$ .

С учётом изложенного выше для векторов  $x, y, z \in \mathbb{C}^N$  циклическая свёртка  $z = x \otimes y$  определяется по формуле

$$z(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) y(k \underset{N}{\ominus} l).$$

Дискретное преобразование Фурье циклическую свёртку переводит в поординатное произведение векторов  $Z(k) = X(k)Y(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

### 3.6 Дискретное преобразование Фурье над конечным полем

Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{F}[q]$  конечное поле порядка  $q = p^m$  и  $\mathbb{F}^*$  его мультипликативная группа. Тогда по теореме Лагранжа в этом поле любой ненулевой элемент имеет порядок, который делит  $q - 1$ . Примитивным называется



такой элемент поля, порядок которого равен  $q - 1$ . В любом конечном поле есть хотя бы один примитивный элемент. Будем его обозначать  $\pi$ . Если  $q - 1$  — простое число, то все элементы, отличные от нуля и единицы, являются примитивными. Если же  $q - 1 = sr$  — составное число, то элемент  $\pi^s$  имеет порядок  $r$ . Таким образом, если  $N \mid (q - 1)$ , то в поле имеется элемент порядка  $N$ . Обозначим его через  $\omega = \omega_N$ . Тогда дискретное преобразование Фурье порядка  $N$  над полем  $\mathbb{F}$  определяется по формуле

$$V(k) = \sum_{l=0}^{N-1} v(l)\omega^{-kl}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Обозначим тем же символом  $N$  сумму  $N$  единиц поля:

$$N = \sum_{j=1}^N 1 \in \mathbb{F}.$$

Так как число  $N$  делит  $q - 1 = p^m - 1$ , то само число  $N$  не делится на простое число  $p$ . Следовательно, сумма  $N$  единиц не равна нулю в поле характеристики  $p$ . Отсюда следует, что элемент поля  $N$  обратим. Повторяя такие же выкладки, какие были проведены над полем  $\mathbb{C}$ , получим, что и здесь обратное дискретное преобразование Фурье находится по формуле

$$v(l) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} V(k)\omega^{kl}, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Таким образом, для векторов

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V(2) \\ \vdots \\ V(N-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(N-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^N$$

и матрицы

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{1-N} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{2(1-N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{1-N} & \omega^{2(1-N)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

дискретное преобразования Фурье определено по формуле

$$\mathbf{V} = W_N \mathbf{v}$$

и обратимо. Обратное дискретное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$\mathbf{v} = W_N^{-1}\mathbf{V},$$

где

$$W_N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь необходимо определить дискретное преобразование Фурье в случае, когда его порядок не делит порядок мультипликативной группы поля, равный  $q - 1$ . В этом случае над данным полем построить дискретное преобразование Фурье нельзя из-за отсутствия элемента  $\omega$  порядка  $N$ . Чтобы проследить аналогию с полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  заметим, что над полем вещественных чисел можно построить дискретное преобразование Фурье только второго порядка. Это связано с тем, что в поле вещественных чисел имеется элемент  $-1$  второго порядка и нет ни одного элемента большего конечного порядка. Поэтому приходится искать элемент большего порядка в расширении поля. Но тогда результат применения дискретного преобразования Фурье находится тоже в расширении поля. Таким образом нужно уметь строить расширение (желательно наименьшее) поля, содержащее хотя бы один элемент данного порядка  $N$ . Пусть числа  $N$  и  $q$  взаимно простые. Так как число  $q$  есть степень простого числа  $p$ , то значит среди делителей числа  $N$  нет числа  $p$ . Разделим каждое из чисел  $q, q^2, q^3, \dots, q^{N+1}$  на  $N$  с остатком:

$$\begin{aligned} q &= Nt_1 + r_1, \\ q^2 &= Nt_2 + r_2, \\ q^3 &= Nt_3 + r_3, \\ &\dots \\ q^{N+1} &= Nt_{N+1} + r_{N+1}. \end{aligned}$$

Остатки  $r_i$  от деления на число  $N$  могут принимать  $N$  значений  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Среди  $1 + N$  чисел  $r_1, r_2, \dots, r_{N+1}$  найдётся хотя бы одна пара равных между собой. Выберем пару, первое число из которой встречается в вышеприведённых равенствах раньше других. Пусть в пару попадают остатки из  $i$ -го и  $j$ -го равенства,  $i \neq j$ . Тогда  $r_i = r_j$ . Так как  $r_i = q^i - Nt_i$ ,  $r_j = q^j - Nt_j$ , то  $q^i - Nt_i = q^j - Nt_j$  и, следовательно,  $q^i - q^j = Nt_i - Nt_j$ . Пусть для определённости  $i > j$ , тогда  $q^j(q^{i-j} - 1) = N(t_i - t_j)$ . Это значит, что число  $q^j(q^{i-j} - 1)$  делится на  $N$ . Так как числа  $q$  и  $N$  взаимно простые, то и числа  $q^i$  и  $N$  тоже взаимно простые. Поэтому  $q^{i-j} - 1$  делится на  $N$ . Отсюда следует, что в поле  $\mathbb{F}[q^{i-j}]$  имеется элемент  $N$ -го порядка. В этом

поле можно построить дискретное преобразование Фурье порядка  $N$ .

Если же числа  $N$  и  $q$  не взаимно простые, то дискретное преобразование Фурье порядка  $N$  в расширении поля  $\mathbb{F}[q]$  построить нельзя. Действительно, так как  $q = p^m$ , то число  $N$  делится на простое число  $p$ . Если бы в поле  $\mathbb{F}[q^k]$  можно было бы построить дискретное преобразование Фурье порядка  $N$ , то число  $q^k - 1$  делилось бы на  $N$ . Тогда и число  $p^{km} - 1$  делится на  $N$ , а, следовательно, и на  $p$ , что невозможно.

Пример. Построить дискретное преобразование Фурье третьего порядка над полем характеристики 2.

В  $\mathbb{F}[2]$  нет элемента третьего порядка. Зато он есть в поле  $\mathbb{F}[4]$ . При реализации последнего поля как кольца многочленов с коэффициентами из поля  $\mathbb{F}[2]$  по модулю неприводимого многочлена  $x^2 + x + 1$  его элементами будут  $[0]$ ,  $[1]$ ,  $[x]$ ,  $[x + 1]$ . Порядок двух последних элементов равен трём. Для построения дискретного преобразования Фурье можно взять любой из них. Пусть, например,  $\omega = [x]$ . Тогда с учётом равенств  $\omega^2 = [x + 1]$ ,  $\omega^4 = \omega$  и обозначения  $\mu = \omega$  дискретное преобразование Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} V_0 &= v_0 + v_1 + v_2, \\ V_1 &= v_0 + v_1\omega + v_2\mu, \\ V_2 &= v_0 + v_1\mu + v_2\omega. \end{aligned}$$

Так как  $\omega^{-1} = \mu$ ,  $\mu^2 = \omega$  и  $(1 + 1 + 1)^{-1} = 1$  в поле  $\mathbb{F}[4]$ , обратное дискретное преобразование Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} V_0 &= v_0 + v_1 + v_2, \\ V_1 &= v_0 + v_1\mu + v_2\omega, \\ V_2 &= v_0 + v_1\omega + v_2\mu. \end{aligned}$$

### 3.7 Применение дискретного преобразования Фурье для приближённого вычисления интегрального преобразования Фурье

Достаточно часто для вычисления интегрального преобразования Фурье используется какой-нибудь быстрый алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье. Рассмотрим какие эффекты могут возникнуть в этой ситуации.

Итак, требуется вычислить интегральное преобразование Фурье

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi} dt.$$

Будем считать, что основной вклад в интеграл по  $\mathbb{R}$  вносит интеграл по интервалу  $(0; M)$ . Это значит, что интегралом по внешности интервала

$(0; M)$  можно пренебречь. Тогда имеется приближенное равенство

$$F(\xi) \approx \int_0^M f(t)e^{-it\xi} dt.$$

Для приближённого вычисления этого интеграла воспользуемся формулой прямоугольников. Разобьем интервал интегрирования  $(0; M)$  с шагом  $\Delta t$  на  $N$  частей,  $M = N\Delta t$ . Тогда по формуле прямоугольников

$$F(\xi) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-it_k\xi}.$$

Выберем в качестве  $t_k$  левые концы интервалов, на которые разбит  $(0; M)$ . Таким образом,  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , тогда

$$F(\xi) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t)e^{-ik\Delta t\xi}.$$

Вычислим интеграл не во всех точках  $\xi$ , а только в узлах  $\xi_l = l\Delta\xi$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда

$$F(\xi_l) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ik\Delta t l\Delta\xi},$$

где обозначено  $f_k = f(\Delta tk)$ . Пусть  $\Delta t$  и  $\Delta\xi$  связаны соотношением

$$\Delta t \Delta\xi = \frac{2\pi}{N}. \quad (59)$$

Тогда

$$F_l \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kl},$$

где введено обозначение  $F_l = F(\xi_l) = F(\Delta\xi l)$ .

Таким образом, при указанных выше допущениях интегральное преобразование Фурье можно вычислять приближённо с помощью дискретного преобразования Фурье, правда при этом следует соблюдать равенство (59). Это соотношение между шагом  $\Delta t$  и шагом  $\Delta\xi$  не позволяет произвольно их менять (уменьшать или увеличивать) при фиксированном  $N$ .

Рассмотрим теперь случай, когда можно пренебречь интегралом по внешности интервала  $(N_1; N_2)$ . Тогда

$$F(\xi) \approx \int_{N_1}^{N_2} f(t)e^{-it\xi} dt.$$

Сделаем замену независимой переменной  $t = s + N_1$ , тогда

$$F(\xi) \approx \int_0^{N_2-N_1} f(s + N_1) e^{-i(s+N_1)\xi} ds$$

и

$$F(\xi) \approx e^{-iN_1\xi} \int_0^{N_2-N_1} f(s + N_1) e^{-is\xi} ds.$$

Последний интеграл можно приближённо вычислять с помощью дискретного преобразования Фурье, как выше. Следует заметить, что отсчёты подынтегральной функции берутся на интервале  $(N_1; N_2)$ . Если после вычисления дискретного преобразования Фурье результат не умножить на  $e^{-iN_1\xi}$ , то при достаточно большом по модулю числе  $N_1$  наблюдается следующий интересный эффект. При таком  $N_1$  функция  $e^{-i(N_1)\xi}$  быстро осциллирует. Это означает, что при небольшом изменении переменной  $\xi$ , значение функции быстро меняется, перемещаясь по единичной окружности в комплексной плоскости. Если же вычислять значения быстро осциллирующей функции в точках сетки, то, как правило, получаются числа, напоминающие значения случайной величины.

Пусть теперь требуется вычислить значения преобразования Фурье на интервале  $(L_1; L_2)$ . Выше вычисления велись на интервале  $(0; L)$ , где  $L = N\Delta\xi$ . Сделаем замену переменных  $\xi = \eta + L_1$ . Тогда, если переменная  $\xi$  принимает значения на интервале  $(L_1; L_2)$ , то переменная  $\eta$  — на интервале  $(0; L)$ ,  $L = L_2 - L_1$ . Поэтому

$$F(\eta + L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it(\eta+L_1)} dt$$

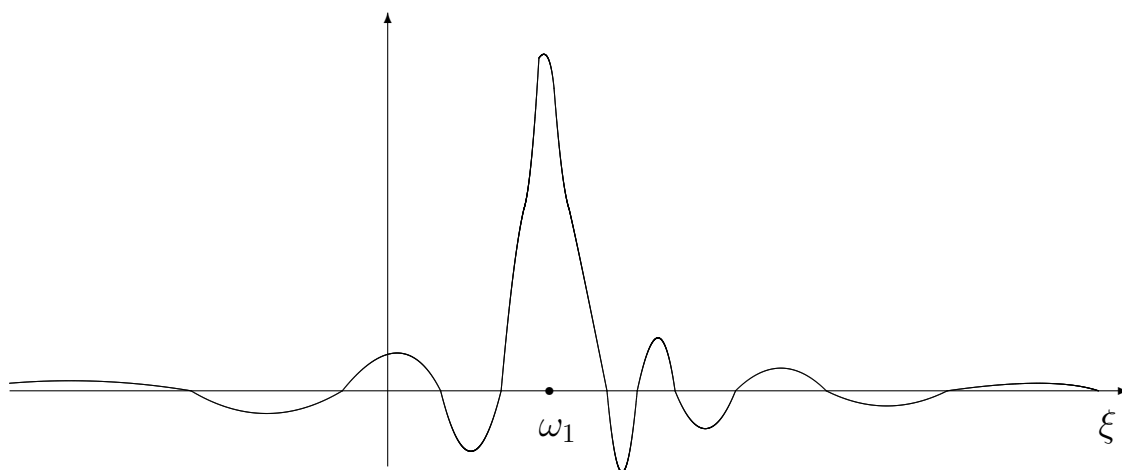
и

$$F(\eta + L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itL_1} e^{-it\eta} dt.$$

Получается, что перед вычислением интеграла нужно подынтегральную функцию  $f(t)$  умножить на  $e^{-itL_1}$ .

Часто встречается в приложениях следующий **пример**. Рассмотрим дискретный сигнал, равный сумме двух гармонических дискретных сигналов  $2 \cos(\Omega_1 n + \varphi_1) + 5 \cos(\Omega_2 n + \varphi_2 n)$ . Он получен как дискретизация аналогового сигнала  $2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + 5 \cos(\omega_2 n + \varphi_2 t)$ , где  $\Omega = \omega \Delta t$ . Допустим, что частоты гармоник сигнала неизвестны. Требуется по дискретизации вычислить, пусть приближённо, но быстро, эти частоты. Непрерывное преобразование Фурье не существует для ненулевых периодических сигналов. Можно рассмотреть преобразование Фурье в смысле обобщённых функций. Результатом будет сумма двух обобщённых дельта-функций:  $2\delta(\xi - \omega_1) + 5\delta(\xi - \omega_2)$ . Если взять  $N$  отсчётов дискретизации сигнала и

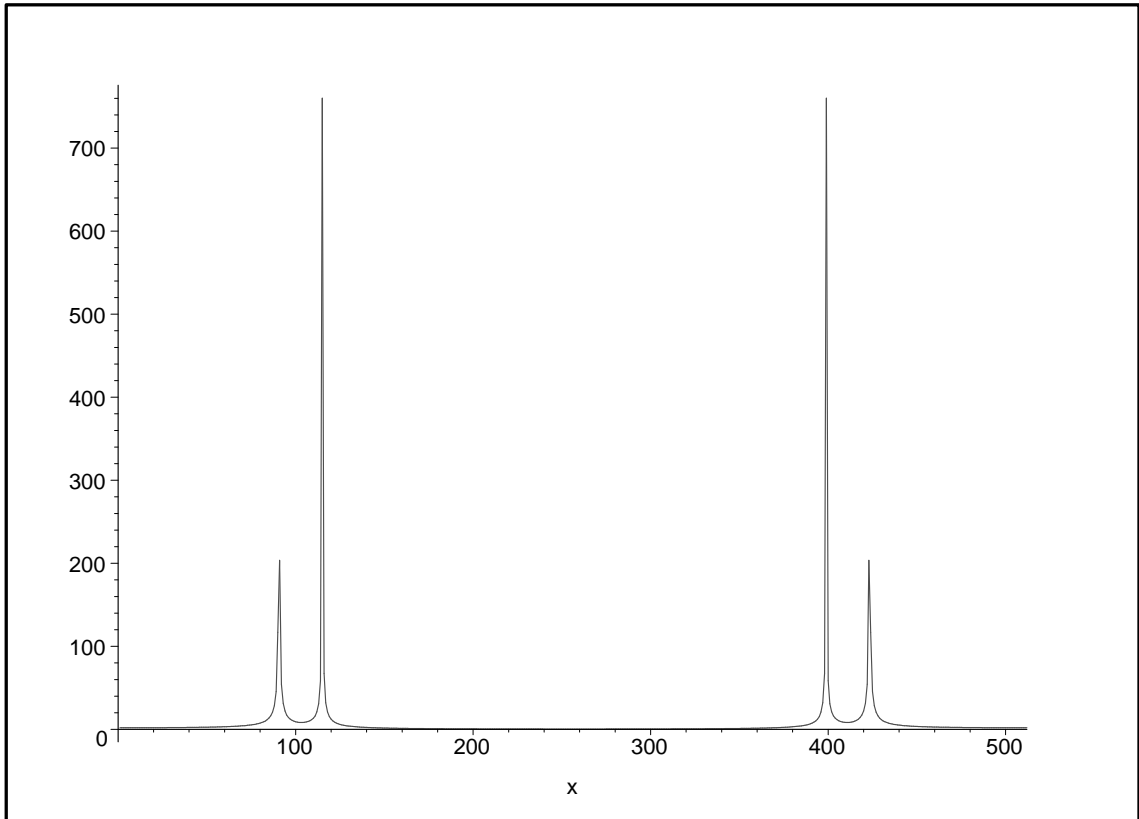
вычислить от них дискретное преобразование Фурье порядка  $N$ , то по вышеизложенному получим приближение к точному значению. Последовательность функций, сходящуюся к дельта-функции, называют последовательностью дельта-образных функций. Таким образом, дискретное преобразование Фурье даёт дискретизацию дельта-образной функции, которая, как правило, имеет вид



и является приближением к  $\delta(\xi - \omega_1)$ . По абсциссе вершины пика на графике можно приблизительно найти величину  $\omega_1$ . Каждой гармонике отвечает такой пик. Однако следует обратить внимание на то, что при этом появляются ложные пики. Это связано с формулой (6), следствием которой является появление отрицательных частот. А так как при дискретном преобразовании Фурье значения появляются периодически, то пики из отрицательной части по периодичности перемещаются на основной период. Например, если взять аналоговый сигнал

$$x(t) = \sin(1.1t) + 3 \sin(1.4t)$$

и дискретизировать его с шагом  $\Delta t = 1$  при  $t = 1, 2, \dots, 512$ , вычислить дискретное преобразование Фурье и построить по точкам график модуля полученных значений, то получим следующий рисунок:



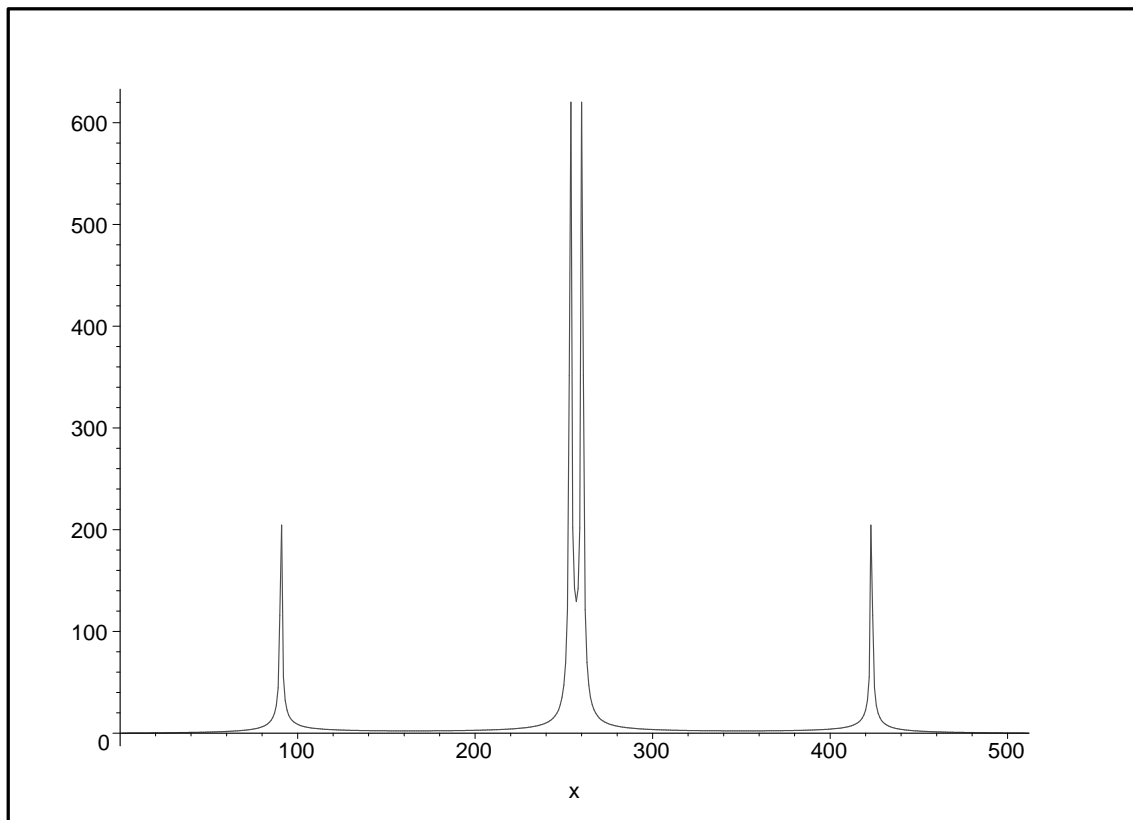
Из (59) получим

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{512} \approx 0,0123$$

. На графике видно, что первый пик расположен при аргументе, равном приблизительно  $k \approx 90$ . Тогда круговая частота  $\omega \approx k\Delta\xi \approx 1,1$ . Для второго пика  $k \approx 115$  и  $\omega \approx 1,4$ . Таким образом, с достаточно высокой точностью определена частота сигнала. Симметрично расположенные пики на рисунке справа являются ложными. В некоторых случаях они могут мешать основным пикам. Так если рассмотреть сигнал

$$x(t) = \sin(1.1t) + 3 \sin(3.1t)$$

для  $t = 1, 2, \dots, 512$ , то получим следующий график, где пики накладываются друг на друга.



### 3.8 Задания для самопроверки

1. Построить дискретное преобразование Фурье а) четвертого порядка; б) пятого порядка над полем наименьшего порядка.

2. Вычислить циклические свёртки по определению и с использованием дискретного преобразования Фурье:

а)  $(2; 3; -1; 4) * (-1; 2; 0; 3);$

б)  $(2; 2; -1; -3) * (2; -3; 1; 1);$

в)  $(2; -1; 3; 1) * (-2; 1; 3; 0);$

г)  $(-2; 4; 1; -1) * (2; 1; -2; 3).$

3. Используя доступные средства вычислительной техники, для аналоговых сигналов

а)  $x(t) = \sin(0.7t) + 2 \cos(1.2t),$

б)  $x(t) = \cos(1.3t) + 3 \sin(0.6t),$

в)  $x(t) = \cos(t) + 3 \sin(1.2t),$

г)  $x(t) = \sin(1.4t) + 3 \cos(0.8t)$

при  $N = 512$ ,  $\Delta t = 1$  с помощью дискретного преобразования Фурье определить частоты слагаемых. Выяснить при каком уровне шума ещё можно выделить приближённое значение частот. Шум смоделировать с помощью генератора псевдослучайных чисел.



### 3.9 Тест

1. Дискретное преобразование Фурье вычисляется по следующей формуле:

а)  $V(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v(j) \omega^{jk},$

б)  $V(k) = \sum_{j=1}^n v(j) \omega^{jk},$

в)  $V(k) = \sum_{j=0}^{n-1} v(k-j) \omega^{jk},$

г)  $V(k) = \sum_{j=0}^{n-1} v(j) \omega^{jk},$

д)  $V(k) = \sum_{j=1}^n v(k-j) \omega^{jk}.$

2. Циклическая свёртка  $x$  и  $y$ , равная  $u$ , вычисляется по следующей формуле:

а)  $u(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(j) y(k-j),$

б)  $u(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(j) y(k+j),$

в)  $u(k) = \sum_{j=0}^{n-1} x(j) y(k-j),$

г)  $u(k) = \sum_{j=0}^{n-1} x(j) y(k+j),$

д)  $u(k) = \sum_{j=0}^{n-1} x(j) y(k \ominus_N j).$

3. Для периодического сигнала  $x$  его преобразование Фурье  $X$  имеет следующие члены:

а)  $X(-1) = 1, X(0) = 1 + i, X(1) = -1, X(2) = 1 - i,$

б)  $X(-1) = 1 + 2i, X(0) = 2, X(1) = 1 - 2i, X(2) = 1 + i,$

в)  $X(-1) = i, X(0) = 1, X(1) = 1 + i, X(2) = 2,$

г)  $X(-1) = -i, X(0) = -1 + i, X(1) = i, X(2) = 2i,$

д)  $X(-1) = i, X(0) = -i, X(1) = i, X(2) = -i.$

## 4 Быстрое преобразование Фурье

### 4.1 Общий алгоритм

Быстрым преобразованием Фурье будем называть способ вычисления дискретного преобразования Фурье, требующий существенно меньшего числа арифметических операций (ощутимого для пользователя), чем традиционный способ.

Традиционный способ использует формулу

$$V(k) = \sum_{l=0}^{N-1} v(l)\omega^{kl}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $\omega = \omega_N$  имеет порядок  $N$ . Для ускорения вычислений степени  $\omega^{kl}$  можно вычислить заранее и затабулировать (затабличить, замассивить). Поэтому при подсчёте необходимого числа арифметических операций возведения в степень не будем учитывать. Для нахождения каждого  $V(k)$  требуется  $N$  умножений и  $N-1$  сложений и так  $N$  раз. Поэтому общее число умножений равно  $M(N) = N^2$ , общее число сложений равно  $A(N) = N(N-1)$ . Однако, глядя на матрицу дискретного преобразования Фурье, имеющую интересную внутреннюю структуру, можно предположить, что это можно использовать для ускорения вычислений. Удивительные способы такого ускорения были найдены Кули (Cooley J.W.) и Тьюки (Tukey J.W.) в 1965 году, и Гудом (Good J.J.) и Томасом (Thomas L.H.) в 1960–1968 годах. (Появились сообщения, что в рукописях Гаусса 1802 года найдены элементы или идеи этого алгоритма.)

Основная идея состоит в том, что если порядок алгоритма равен  $N$  и  $N = N_1 N_2$  составное число, то векторы порядка  $N$  можно записать в виде матриц размера  $N_1 \times N_2$ . Конечно, имеется несколько способов такой записи. Например, можно записать по порядку по строкам или столбцам. Пусть элемент  $v(l)$  (или  $V(k)$ ) помещён в  $l_1$  ( $k_1$ ) строку и  $l_2$  ( $k_2$ ) столбец матрицы. Потребуем, чтобы эти индексы были связаны линейными соотношениями

$$l \equiv L_1 l_1 + L_2 l_2 \pmod{N}$$

для фиксированных целых чисел  $L_1, L_2$  и

$$k \equiv K_1 k_1 + K_2 k_2 \pmod{N}$$

для фиксированных целых чисел  $K_1, K_2$ .

Так как все элементы вектора должны быть перенесены в матрицу, то каждая из этих формул должна задавать биективное (взаимно однозначное) отображение из декартового произведения множеств  $\{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\}$  во множество  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ .

Таким образом элемент вектора  $V(k) = V(K_1k_1 + K_2k_2)$  размещён в матрицу  $V$  в  $k_1$  строку и в  $k_2$  столбец. Элемент, стоящий в  $k_1$  строке и в  $k_2$  столбце матрицы  $V$ , обозначим через  $V_{k_1, k_2}$ . Значит,  $V_{k_1, k_2} = V(k)$ . Аналогично,  $v_{l_1, l_2} = V(l)$ .

Тогда

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{l=0}^{N-1} v(l)\omega^{-kl} = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} v_{l_1, l_2} \omega^{(K_1k_1 + K_2k_2)(L_1l_1 + L_2l_2)}.$$

Здесь во втором равенстве использовалась биективность отображения замены переменных и то, что порядок элемента  $\omega$  равна  $N$ . После раскрытия скобок в показателе с учётом свойств показательной функции получим

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \omega^{K_1L_1k_1l_1} \omega^{K_2L_1k_2l_1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} v_{l_1, l_2} \omega^{K_2L_2k_2l_2} \omega^{K_1L_2k_1l_2}.$$

В этой формуле четыре числа  $K_1, K_2, L_1, L_2$  пока достаточно произвольны. Потребуем, чтобы они удовлетворяли дополнительным условиям. Подберём эти условия так, чтобы первая (вторая) сумма стала похожа на дискретное преобразование Фурье порядка  $N_1$  (порядка  $N_2$ ). Кроме того, для упрощения формулы желательно убрать последний множитель. Для выполнения этих условий потребуем, чтобы

$$\text{ord}(\omega^{K_1L_1}) = N_1, \quad \text{ord}(\omega^{K_2L_2}) = N_2, \quad \omega^{K_1L_2} = 1.$$

Эти условия будут выполняться, если

$$\begin{aligned} K_1L_1 &\equiv N_2 \pmod{N}, \\ K_2L_2 &\equiv N_1 \pmod{N}, \\ K_1L_2 &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Обозначим  $\omega_{N_1} = \omega^{K_1L_1} = \omega^{N_2}$ ,  $\omega_{N_2} = \omega^{K_2L_2} = \omega^{N_1}$ , тогда

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{k_1l_1} (\omega_{N_2}^{K_2L_1})^{k_2l_1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{k_2l_2} v_{l_1, l_2}. \quad (60)$$

Выясним необходимое число арифметических операций для вычисления дискретного преобразования Фурье по формуле (60). Для этого введём обозначения. Пусть  $A_c(N)$ ,  $M_c(N)$  соответственно число комплексных сложений и умножений при вычислении по данному алгоритму дискретного преобразования Фурье порядка  $N$ . Тогда, глядя на внутреннюю сумму, видим, что здесь для каждого  $l_1$  вычисляется дискретное преобразование Фурье порядка  $N_2$ . Число сложений и умножений для его вычисления соответственно равно  $A_c(N_2)$  и  $M_c(N_2)$ . Так как  $l_1$  пробегает  $N_1$  значений и

для каждого нужно вычислять дискретное преобразование Фурье порядка  $N_2$ , то получаем для внутренней суммы общее число сложений и умножений соответственно равно  $N_1 A_c(N_2)$  и  $N_1 M_c(N_2)$ . В результате получается  $N = N_1 N_2$  чисел, зависящий от индексов  $l_1$  и  $k_2$ . Каждое из этих чисел умножается на соответствующий множитель  $(\omega^{K_2 L_1})^{k_2 l_1}$ . Это даёт ещё  $N$  умножений. Теперь смотрим на внешнюю сумму. Здесь вычисляется дискретное преобразование Фурье порядка  $N_1$  для каждого  $k_2$ . Поэтому внешняя сумма даст соответственно  $N_2 A_c(N_1)$  и  $N_2 M_c(N_1)$  сложений и умножений. В итоге общее число сложений равно

$$A_c(N) = N_2 A_c(N_1) + N_1 A_c(N_2),$$

а общее число умножений равно

$$M_c(N) = N_2 M_c(N_1) + N_1 M_c(N_2) + N.$$

Теперь, даже вычисляя дискретные преобразования Фурье порядков  $N_1$  и  $N_2$  по обычному алгоритму, требующему соответственно около  $(N_1)^2$  и  $(N_2)^2$  операций, получим

$$A_c(N) = N_2(N_1)^2 + N_1(N_2)^2 = N_1 N_2(N_1 + N_2) = N(N_1 + N_2),$$

$$M_c(N) = N_2(N_1)^2 + N_1(N_2)^2 + N = N(N_1 + N_2 + 1).$$

Например, пусть  $N_1 = 10$  и  $N_2 = 100$ . Тогда  $N = 1000$ . Если вычислять дискретное преобразование Фурье по обычному алгоритму, то получим, что требуется около миллиона и сложений и умножений. По вышеприведённому алгоритму  $A_c(N) = 110\,000$  и  $M_c(N) = 111\,000$ , что в девять раз меньше. Дальнейшего уменьшения числа операций можно достичь, вычисляя дискретное преобразование Фурье порядков  $N_1$  и  $N_2$  по этому же алгоритму, если числа  $N_1$  и  $N_2$  разлагаются на множители. Пусть например  $N = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 2^{k-1}$ . Тогда

$$A_c(2^k) = 2^{k-1} A_c(2) + 2 A_c(2^{k-1}),$$

$$M_c(2^k) = 2^{k-1} M_c(2) + 2 M_c(2^{k-1}) + 2^k.$$

Если обозначить  $a(k) = A_c(2^k)$  и  $m(k) = M_c(2^k)$ , то с учётом равенств  $A_c(2) = 2$ ,  $M_c(2) = 0$  получим

$$a(k) = 2^k + 2a(k-1), \quad m(k) = 2m(k-1) + 2^k. \quad (61)$$

Получили разностные уравнения. Заметим, что дискретное преобразование Фурье второго порядка содержит два сложения и не содержит умножений. Поэтому  $a(1) = 2$ ,  $m(1) = 0$ . Тогда по формулам (61) легко вычислить, что  $a(2) = 6$ ,  $m(2) = 4$ . Далее для  $k = 3, 4, \dots$  по этим же формулам находим

значения  $a(k)$ ,  $m(k)$ , причём единственным образом. Таким образом, при данных начальных условиях разностные уравнения имеют единственное решение. Решения разностных уравнений имеют вид  $a(k) = 2^k(k + C)$ ,  $m(k) = 2^k(k + C)$ , что легко проверяется подстановкой в уравнения. Для первого решения начальное условие даёт равенство  $a(1) = 2(1 + C) = 2$ , из которого получаем, что  $C = 0$ . Для второго уравнения  $m(k) = 2^k(k + C)$ . С учётом начального условия  $m(1) = 2(1 + C) = 0$  получаем, что  $C = -1$ . Тогда

$$a(k) = 2^k k, \quad m(k) = 2^k(k - 1).$$

Поэтому

$$A_c(N) = N \log_2 N, \quad M_c(N) = N \log_2 N - N. \quad (62)$$

## 4.2 Вариант Кули и Тьюки

Пусть числа равны  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = N_1$ ,  $K_1 = N_2$ ,  $K_2 = 1$ . Тогда эти числа удовлетворяют необходимым условиям:

$$K_1 L_1 = N_2, \quad K_2 L_2 = N_1, \quad K_1 L_2 = N_2 N_1 \equiv 0 \pmod{N}.$$

Тогда связь индексов вектора и матрицы приобретает вид:

$$l \equiv l_1 + N_1 l_2 \pmod{N}$$

и

$$k \equiv N_2 k_1 + k_2 \pmod{N}.$$

По этому соответствию индексов элементы векторов заполняют матрицы по столбцам для  $l$ :

$$\begin{pmatrix} v(0) & v(N_1) & v(2N_1) & \dots & v(N - N_1) \\ v(1) & v(N_1 + 1) & v(2N_1 + 1) & \dots & v(N - N_1 + 1) \\ v(2) & v(N_1 + 2) & v(2N_1 + 2) & \dots & v(N - N_1 + 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v(N_1 - 1) & v(2N_1 - 1) & v(3N_1 - 1) & \dots & v(N - 1) \end{pmatrix},$$

и по строкам для  $k$ :

$$\begin{pmatrix} V(0) & V(1) & V(2) & \dots & V(N_2 - 1) \\ V(N_2) & V(N_2 + 1) & V(N_2 + 2) & \dots & V(2N_2 - 1) \\ V(2N_2) & V(2N_2 + 1) & V(2N_2 + 2) & \dots & V(3N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V(N - N_2) & V(N - N_2 + 1) & V(N - N_2 + 2) & \dots & V(N - 1) \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (60) в этом случае приобретает вид

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{k_1 l_1} \omega^{k_2 l_1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{k_2 l_2} v_{l_1, l_2}. \quad (63)$$

### 4.3 Вариант Гуда и Томаса

Этот вариант возможен лишь когда множители  $N_1, N_2$  являются взаимно простыми. В этом случае их наибольший общий делитель равен единице  $(N_1, N_2) = 1$ . Для наибольшего общего делителя имеется его линейное представление. Это значит, что существуют целые числа  $n_1$  и  $n_2$ , для которых выполняется равенство

$$n_1N_1 + n_2N_2 = 1.$$

Положим теперь  $L_1 = n_2N_2$ ,  $L_2 = n_1N_1$ ,  $K_1 = N_2$ ,  $K_2 = N_1$ . Нужно проверить, что эти числа удовлетворяют необходимым условиям:

$$\begin{aligned} K_1L_1 &= N_2n_2N_2 \equiv N_2 \pmod{N}, \\ K_2L_2 &= N_1n_1N_1 \equiv N_1 \pmod{N}, \\ K_1L_2 &= N_2n_1N_1 = n_1N \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Действительно, так как  $n_2N_2 = 1 - n_1N_1$ , то для первого условия

$$N_2n_2N_2 = N_2(1 - n_1N_1) = N_2 - n_1N_1N_2 = N_2 - n_1N \equiv N_2 \pmod{N}.$$

Аналогично, для второго условия

$$N_1n_1N_1 = N_1(1 - n_2N_2) = N_1 - n_2N_2N_1 = N_1 - n_2N \equiv N_1 \pmod{N}.$$

Третье условие, очевидно, тоже выполняется.

Связь индексов вектора и матрицы, куда записываются элементы вектора, приобретает вид:

$$l \equiv n_2N_2l_1 + n_1N_1l_2 \pmod{N} \quad (64)$$

и

$$k \equiv N_2k_1 + N_1k_2 \pmod{N}. \quad (65)$$

Осталось доказать, что эти отображения обратимы. Для этого найдём остаток от деления  $l$  на  $N_1$ , который равен остатку от деления числа

$$n_2N_2l_1 + n_1N_1l_2 = (1 - n_1N_1)l_1 + n_1N_1l_2 = l_1 + N_1(n_1l_2 - n_1l_1).$$

на  $N_1$ . Видно, что этот остаток равен  $l_1$ . Таким образом,

$$l_1 \equiv l \pmod{N_1}.$$

и, следовательно, индекс  $l_1$  однозначно определяется по значению индекса  $l$ . Аналогично,

$$l_2 \equiv l \pmod{N_2}.$$

Для того, чтобы выразить  $k_1$  и  $k_2$ , предварительно нужно умножить сравнение (65) на  $n_2$  и  $n_1$  соответственно. Тогда

$$k_1 \equiv n_2 k \pmod{N_1}, \quad k_2 \equiv n_1 k \pmod{N_2}.$$

Следовательно, отображения (64) и (65) обратимы. Кроме того,  $L_1 K_2 = n_2 N_2 N_1 = n_2 N$  кратно  $N$ . Значит,  $\omega^{L_1 K_2} = 1$ . Тогда формула (60) упрощается и приобретает вид двумерного дискретного преобразования Фурье

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{k_1 l_1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{k_2 l_2} v_{l_1, l_2}. \quad (66)$$

#### 4.4 Вариант Кули и Тьюки по основанию 2

Этот алгоритм применяется, когда  $N = 2^m$  для некоторого натурального  $m$ . Тогда, если положить  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 2^{m-1}$ , то алгоритм называется БПФ Кули и Тьюки по основанию два с прореживанием по времени. Так как  $\omega^{n/2} = -1$ , то равенство (63) можно записать в виде

$$V_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\omega^2)^{jk} v_{2j} + \omega^k \sum_{j=0}^{N/2-1} (\omega^2)^{jk} v_{2j+1}, \quad (67)$$

$$V_{k+n/2} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\omega^2)^{jk} v_{2j} - \omega^k \sum_{j=0}^{N/2-1} (\omega^2)^{jk} v_{2j+1} \quad (68)$$

для  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ . Входной вектор разбивается на чётные и нечётные компоненты, выходной — на первые и вторые  $n/2$  элементов.

Если  $N_1 = 2^{m-1}, N_2 = 2$ , то получим БПФ Кули и Тьюки по основанию два с прореживанием по частоте.

$$V_{2k} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\omega^2)^{jk} (v_j + v_{j+N/2}), \quad (69)$$

$$V_{k+N/2} = \sum_{j=0}^{N/2-1} \omega^j (\omega^2)^{jk} (v_j - v_{j+N/2}) \quad (70)$$

для  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ .

#### 4.5 Вариант Кули и Тьюки по основанию 4

Рассмотрим только вариант с прореживанием по времени. Он получается, если в общей схеме алгоритма для  $N = 4^k$  положить  $N_1 = 4$  и

$N_2 = 4^{k-1} = N/4$ . Тогда равенства

$$\omega_{N_1} = \omega^{N_2} = \left( e^{-\frac{2\pi i}{N}} \right)^{\frac{N}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i, \quad \omega_{N_2} = \omega^4$$

при  $k = 0, \dots, N/4 - 1 = 4^{m-1} - 1$  приводят к формулам

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j} + \omega^k \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+1} + \\ &+ \omega^{2k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+2} + \omega^{3k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+3}, \\ V_{k+N/4} &= \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j} - i\omega^k \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+1} - \\ &- \omega^{2k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+2} + i\omega^{3k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+3}, \\ V_{k+N/2} &= \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j} - \omega^k \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+1} + \\ &+ \omega^{2k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+2} - \omega^{3k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+3}, \\ V_{k+3N/4} &= \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j} + i\omega^k \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+1} - \\ &- \omega^{2k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+2} - i\omega^{3k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+3}. \end{aligned} \quad (71)$$

Найдём необходимое в этом алгоритме количество сложений и умножений. Заметим прежде всего, что умножения на  $-1$  и  $\pm i$  можно реализовать как вычитания и перемена местами действительной и мнимой части с последующим сложением или вычитанием. Поэтому такие умножения не будем учитывать. Возведения в степень также не учитываются при подсчёте числа умножений. Пусть соответственно  $a(k) = A_c(4^k)$  и  $m(k) = M_c(4^k)$  — число сложений и умножений в алгоритме, порядка  $4^k$ . Во всех формулах в (71) участвуют четыре суммы, являющиеся формулами для вычисления



дискретного преобразования Фурье порядка  $4^{k-1}$ . Для их вычисления требуется  $a(k-1) = A_c(4^{k-1})$  сложений и  $m(k-1) = M_c(4^{k-1})$  умножений. К этому добавляется 12 раз по  $4^{k-1}$  сложений и три раза по  $4^{k-1}$  умножений. В итоге,

$$A_c(4^k) = 4A_c(4^{k-1}) + 12 \cdot 4^{k-1}, \quad M_c(4^k) = 4M_c(4^{k-1}) + 3 \cdot 4^{k-1}$$

или

$$a(k) = 4a(k-1) + 3 \cdot 4^k, \quad m(k) = 4m(k-1) + 3 \cdot 4^{k-1}.$$

Разностные уравнения, полученные выше, нетрудно решить. Убедитесь с помощью подстановки, что

$$a(k) = 4^k(3k + C), \quad m(k) = 4^{k-1}(3k + C)$$

являются решениями этих уравнений для любого  $C$ . Заметим, что дискретное преобразование Фурье четвёртого порядка ( $k = 1$ ) содержит двенадцать сложений и три умножения. Это приводит к тому, что постоянная  $C$  в обеих формулах равна нулю. Таким образом,

$$a(k) = 3k \cdot 4^k, \quad m(k) = 3k \cdot 4^{k-1}.$$

Это можно записать с учётом равенств  $k = \log_4 N$ ,  $N = 4^k$  в виде

$$A_c(N) = 3N \log_4 N = \frac{3}{2}N \log_2 N, \quad M_c(4^k) = \frac{3}{4}N \log_4 N = \frac{3}{8}N \log_2 N. \quad (72)$$

Приведённые выше формулы (71) с помощью матриц можно записать в несколько более обзримой форме при  $k = 0, \dots, N/4 - 1 = 4^{m-1} - 1$ :

$$\begin{pmatrix} V_k \\ V_{k+N/4} \\ V_{k+N/2} \\ V_{k+3N/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j} \\ \omega^k \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+1} \\ \omega^{2k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+2} \\ \omega^{3k} \sum_{j=0}^{N/4-1} (\omega^4)^{jk} v_{4j+3} \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Тогда видно, что после факторизации матрицы, стоящей в центре равенства (73), в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

получим всего восемь сложений вместо двенадцати. Это приводит к тому, что число сложений уменьшается и становится равным

$$A_c(N) = 2N \log_4 N = N \log_2 N. \quad (74)$$

Сравнивая число необходимых арифметических операций при вычислении дискретного преобразования Фурье по основанию 2 (см. (62)) и по основанию 4 (см. (72), (74)), видим, что при больших  $N$  последний алгоритм быстрее.

## 4.6 Алгоритм Рейдера

Когда порядок дискретного преобразования Фурье  $N$  является составным числом, тогда имеются способы уменьшения числа требуемых арифметических операций. Пусть теперь порядок дискретного преобразования Фурье  $N = p$  — простое число. Нам понадобится для вспомогательных целей поле классов вычетов  $Z_p$  по модулю простого числа  $p$ . Известно, что мультипликативная группа этого поля  $Z_p^* = Z_p \setminus \{0\}$  является циклической. Пусть  $\pi$  — примитивный элемент поля. Тогда все его степени дают все элементы мультипликативной группы:

$$Z_p^* = \{\pi, \pi^2, \dots, \pi^{p-1}\},$$

где  $\pi^{p-1} = 1$ . Например, в поле  $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  можно взять  $\pi = 2$ , так как  $\pi^2 = 4$ ,  $\pi^3 = 3$ ,  $\pi^4 = 1$ .

Свяжем переменные  $k$  и  $l$  зависимостью  $k = \pi^l$ . Заметим, что если переменная  $l$  принимает значения  $1, 2, \dots, p-1$ , то и переменная  $k$  будет принимать значения из того же множества, причём без повторений. Это значит, что данная зависимость определяет биективное отображение из множества  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  в себя. Это позволит ниже сделать замену переменной. Кроме того, свяжем такой же зависимостью переменные  $i$  и  $j$ :  $i = \pi^j$ .

Для  $k = 1, 2, \dots, p-1$  запишем формулу для вычисления дискретного преобразования Фурье в виде

$$V(k) = v(0) + \sum_{i=1}^{p-1} \omega_p^{ik} v(i),$$

после замены переменных получим

$$V(\pi^l) = v(0) + \sum_{j=1}^{p-1} \omega_p^{\pi^j \pi^l} v(\pi^j), \quad l = 1, 2, \dots, p-1.$$

Обычное свойство степеней даёт

$$V(\pi^l) = v(0) + \sum_{j=1}^{p-1} \omega_p^{\pi^{j+l}} v(\pi^j), \quad l = 1, 2, \dots, p-1.$$

Сделаем ещё замены  $q = p - j - 1$  и  $r = l - 1$ . Тогда

$$V(\pi^{r+1}) = v(0) + \sum_{q=0}^{p-2} \omega_p^{\pi^{r+1+p-q-1}} v(\pi^{p-q-1}), \quad r = 0, 1, \dots, p-2.$$

После введения обозначений  $U(r) = V(\pi^{r+1})$ ,  $u(q) = v(\pi^{p-q-1})$  и  $\Omega(s) = \omega_p^{\pi^{p+s}}$  получим

$$U(r) = v(0) + \sum_{q=0}^{p-2} \Omega(r-q)u(q) \quad r = 0, 1, \dots, p-2.$$

Получили циклическую свёртку порядка  $p-1$ . Так как последнее число составное, то можно применить один из быстрых алгоритмов для её вычисления. Оставшееся первое равенство  $V(0) = v(0) + \sum_{i=1}^{p-1} v(i)$  содержит  $-1 + p$  сложений.

#### 4.7 Вычисление циклической свёртки с помощью ДПФ

Для двух векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  их циклическая свёртка  $\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{z}(n) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(n \ominus_N j), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (75)$$

Здесь  $n \ominus_N j$  обозначает вычитание по модулю  $N$ . Для следующих чисел  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  это вычитание можно выполнять по формуле

$$n \ominus_N j = \begin{cases} n - j, & \text{если } n \geq j; \\ N + n - j, & \text{если } n < j. \end{cases}$$

Легко видеть, что для вычисления свёртки по формуле (75) требуется  $N^2$  умножений и  $N(N-1)$  сложений. Популярным способом вычисления свёртки является способ, использующий быстрое преобразование Фурье и состоящий в следующем. Для каждого из векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  находим его дискретное преобразование Фурье  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ . Это требует порядка  $2N \log N$  сложений и умножений. Тогда по основному свойству дискретного преобразования Фурье  $j$ -й элемент преобразования Фурье свёртки равен  $\mathbf{Z}(j) = \mathbf{X}(j)\mathbf{Y}(j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Это требует ещё  $N$  умножений. С помощью обратного дискретного преобразования Фурье находим  $\mathbf{z}$ . Это ещё требует порядка  $N \log N$  сложений и умножений. В итоге получаем  $3N \log N + N$  умножений и  $3N \log N$  сложений. Для больших  $N$  это существенно меньше, чем  $N^2$ . Здесь учитывались комплексные арифметические операции. Если

требуется вычислить вещественную циклическую свёртку, то применение этого метода не вполне адекватно. Оказывается при некоторой модификации можно вычислять сразу две вещественные циклические свёртки. Пусть нужно вычислить  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 * \mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 * \mathbf{y}_2$  для вещественных векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^N$ . Построим два комплексных вектора по формуле  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_2 + i\mathbf{y}_2$  и вычислим их дискретное преобразование Фурье  $U_1$  и  $U_2$ . Так как дискретное преобразование Фурье является линейным преобразованием, то

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{Y}_1, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{X}_2 + i\mathbf{Y}_2. \quad (76)$$

Найдём комплексное сопряжённое для следующих элементов векторов  $U_i$ :

$$\overline{U_j(N-k)} = \overline{X_j(N-k) + iY_j(N-k)} = \overline{X_j(N-k)} - i\overline{Y_j(N-k)}.$$

Используя свойство 4 дискретного преобразования Фурье, получим

$$\overline{U_j(N-k)} = X_j(k) - iY_j(k), \quad j = 1, 2. \quad (77)$$

Тогда складывая равенства (76) и (77), получим

$$X_j(k) = \frac{U_j(k) + \overline{U_j(N-k)}}{2}, \quad (78)$$

и вычитая, получим

$$Y_j(k) = \frac{U_j(k) - \overline{U_j(N-k)}}{2i}. \quad (79)$$

Таким образом, удалось выделить из вектора комплексного  $U_j$  два комплексных вектора  $X_j$ ,  $Y_j$ ,  $j = 1, 2$ . Теперь можно вычислить

$$Z_j(k) = X_j(k)Y_j(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2. \quad (80)$$

Теперь из найденных комплексных векторов построим новый комплексный вектор

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}_1 + i\mathbf{Z}_2.$$

Обратное дискретное преобразование Фурье даёт комплексный вектор  $\mathbf{w} = \mathbf{z}_1 + i\mathbf{z}_2$ . Его действительная часть есть вещественный вектор  $\mathbf{z}_1$ , мнимая часть — вещественный вектор  $\mathbf{z}_2$ .

## 4.8 Задания

1. Построить алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье шестого порядка, используя алгоритм а) Кули и Тьюки; б) Гуда и Томаса.
2. Вычислить две вещественные циклические свёртки четвёртого порядка, используя три раза комплексное дискретное преобразование Фурье:

- а)  $(2; 3; -1; 4) * (1; 0; -3; 2), (1; -1; 3; 2) * (-1; 2; 0; 3);$   
 б)  $(1; -1; 3; -2) * (2; 2; -1; -3), (2; -3; 1; 1) * (1; 0; 2; -2);$   
 в)  $(-1; 2; 0; -2) * (2; -1; 3; 1), (-1; 2; -3; 1) * (-2; 1; 3; 0);$   
 г)  $(-2; 4; 1; -1) * (-2; 1; 1; 3), (2; 1; -2; 3) * (2; -3; 1; 0).$

#### 4.9 Тест

1. Алгоритм Кули и Тьюки существует только для

$$1)N = 15, \quad 2)N = 16, \quad 3)N = 17, \quad 4)N = 18.$$

- а) 2;  
 б) 2, 4;  
 в) 2, 3, 4;  
 г) 1, 2, 4;  
 д) 1, 2, 3.

2. Для алгоритма Гуда и Томаса порядка  $N = 15$  индекс элемента вектора  $v(j)$  с номерами  $j_1, j_2$  строки и столбца его расположения в матрице связаны следующим соотношением:

- а)  $j \equiv -4j_1 + 6j_2 \pmod{15};$   
 б)  $j \equiv -5j_1 + 6j_2 \pmod{15};$   
 в)  $j \equiv 7j_1 - 6j_2 \pmod{15};$   
 г)  $j \equiv -3j_1 + 7j_2 \pmod{15};$   
 д)  $j \equiv 11j_1 + 7j_2 \pmod{15}.$

3. Алгоритм Рейдера дискретное преобразование Фурье приводит к формуле:

$$\text{а) } V(\pi^{r+1}) = v(0) + \sum_{q=1}^{p-1} \omega_p^{\pi^{r+1+p-q-1}} v(\pi^{p-q-1}), \quad r = 1, \dots, p-1.$$

$$\text{б) } V(\pi^{r+1}) = v(0) + \sum_{q=0}^{p-2} \omega_p^{\pi^{r+1+p-q-1}} v(\pi^{p-q-1}), \quad r = 0, 1, \dots, p-2.$$

$$\text{в) } V(\pi^r) = v(0) + \sum_{q=1}^{p-1} \omega_p^{\pi^{r+1+p-q}} v(\pi^{p-q}), \quad r = 1, \dots, p-1.$$

$$\text{г) } V(\pi^r) = v(0) + \sum_{q=0}^{p-2} \omega_p^{\pi^{r+1+p-q-1}} v(\pi^{p-q}), \quad r = 0, 1, \dots, p-2.$$

$$\text{д) } V(\pi^{r+1}) = v(0) + \sum_{q=1}^{p-1} \omega_p^{\pi^{r+p-q-1}} v(\pi^{p-q}), \quad r = 1, \dots, p-1.$$

## 5 Обобщённый спектральный анализ

### 5.1 Введение

Одним из основных методов обработки является разложение сигнала в линейную комбинацию «простейших» сигналов, их обработка и затем синтез из полученных данных выходного сигнала. Конечно, при таком подходе многое зависит от выбора «простейших» сигналов. Часто в качестве последних выбирается ортонормированный базис  $u$  в гильбертовом пространстве сигналов. Тогда анализ состоит в разложении сигнала  $x$  по этому базису:

$$x = \sum_j \alpha_j u_j, \quad \alpha_j = (x, u_j).$$

После обработки коэффициентов разложения  $\alpha_j$  осуществляется обратная процедура — синтез сигнала. Наиболее известный и часто используемый ортонормированный базис в гильбертовом пространстве  $L_2(0; 1)$  состоит из функций  $e^{2\pi i n x}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Этот базис удобен при исследовании периодических аналоговых сигналов и позволяет раскладывать их в ряд Фурье. Для непериодических сигналов нужно использовать другие базисы. Ниже будут построены базисы Хаара и Уолша, широко используемые для построения цифровых фильтров. Отметим попутно, что в последние двадцать лет (см. [9]) были построены и нашли очень широкое применение базисы всплесков (Wavelets), простейшим вариантом которых является базис Хаара. Но это предмет другого пособия.

Для построения базиса Уолша необходим код Грея представления чисел, к рассмотрению которого мы и переходим.

### 5.2 Код Грея

Любое неотрицательное целое число можно записать в двоичной системе счисления, используя только две цифры 0 и 1. Для этого нужно это число разложить по степеням двойки:

$$a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0.$$

Тогда в позиционной системе счисления число  $a$  можно записать в виде

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(2)}, \quad a_i \in \{0, 1\}, \quad i \in \overline{0, n},$$

где черта означает, что здесь стоит не произведение чисел, а (конечная) последовательность цифр двоичных разрядов. Двойка в конце в скобках указывает, что используется двоичная система счисления.

Код Грея

$$a = \overline{g_n g_{n-1} \dots g_1 g_0}_{(gray)}$$

Число	Двоичный код	Код Грея	Число	Двоичный код	Код Грея
0	0000	0000	9	1001	1101
1	0001	0001	10	1010	1111
2	0010	0011	11	1011	1110
3	0011	0010	12	1100	1010
4	0100	0110	13	1101	1011
5	0101	0111	14	1110	1001
6	0110	0101	15	1111	1000
7	0111	0100	16	10000	11000
8	1000	1100	17	10001	11001

Таблица 1: Код Грея для первых восемнадцати целых неотрицательных чисел

тоже является позиционным и бинарным. Последнее означает, что  $g_j \in \{0, 1\}$  для всех  $j \in \overline{0, n}$ .

По определению цифры кода Грея равны

$$g_n = a_n, \quad g_i = a_{i+1} \oplus a_i, \quad i \in \overline{0, n-1}.$$

Здесь  $\oplus$  означает сложение по модулю два. Таким образом,

$$\begin{aligned} g_n &= a_n, \\ g_{n-1} &= a_n \oplus a_{n-1}, \\ g_{n-2} &= a_{n-1} \oplus a_{n-2}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ g_1 &= a_2 \oplus a_1, \\ g_0 &= a_1 \oplus a_0. \end{aligned}$$

По цифрам представления числа в коде Грея можно восстановить его представление в двоичной системе счисления. Действительно, первое уравнение

$$a_n = g_n.$$

Складывая первое и второе уравнение по модулю два, получим

$$a_{n-1} = g_{n-1} \oplus g_n.$$

Далее, складывая (по модулю два) первое, второе и третье уравнение, получим

$$a_{n-2} = g_{n-2} \oplus g_{n-1} \oplus g_n.$$

И так далее. Резюмируя, видим, что

$$a_i = g_i \oplus g_{i+1} \oplus \dots \oplus g_n, \quad i \in \overline{0, n}.$$

Так как представление любого целого неотрицательного числа в двоичной системе счисления единственно, то то, что цифры двоичного кода

выражаются через цифры кода Грея и наоборот, означает, что любое целое неотрицательное число единственным образом можно представить в коде Грея.

Код Грея замечателен тем, что два последовательных (различающиеся на единицу) натуральных числа в этом коде отличаются лишь в одном разряде. Действительно, если меньшее из этих чисел чётно, то его двоичное представление оканчивается на ноль, а двоичное представление следующего натурального числа отличается лишь последним разрядом. Поэтому с учётом формул вычисления цифр кода Грея легко видеть, что представления этих чисел в коде Грея различаются только в последней цифре. Если же меньшее из чисел нечётно, то его двоичное разложение оканчивается на единицу. Но тогда это нечётное число оканчивается на  $k$  ( $k \geq 1$ ) подряд стоящих единиц

$$\dots 0 \underbrace{11\dots 1}_{k \text{ раз}}.$$

Легко видеть, что следующее натуральное число имеет двоичное представление

$$\dots 1 \underbrace{00\dots 0}_{k \text{ раз}}$$

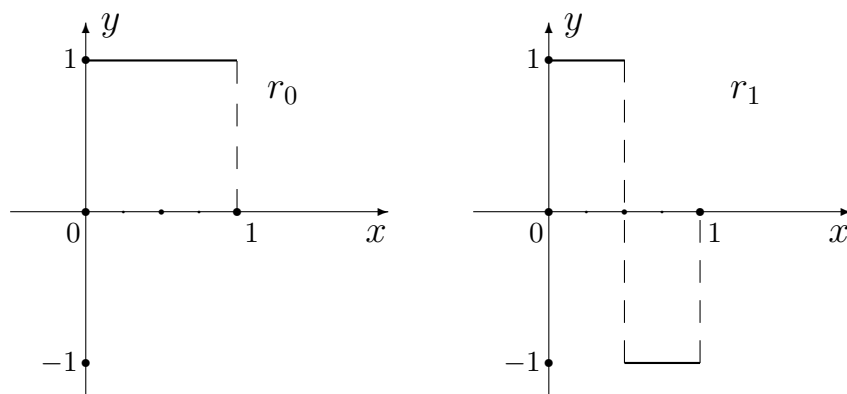
Снова с учётом формул вычисления цифр кода Грея нетрудно видеть, что представления этих чисел в коде Грея различаются только в цифре, стоящей на  $k + 1$  позиции, если считать справа налево.

### 5.3 Система функций Уолша

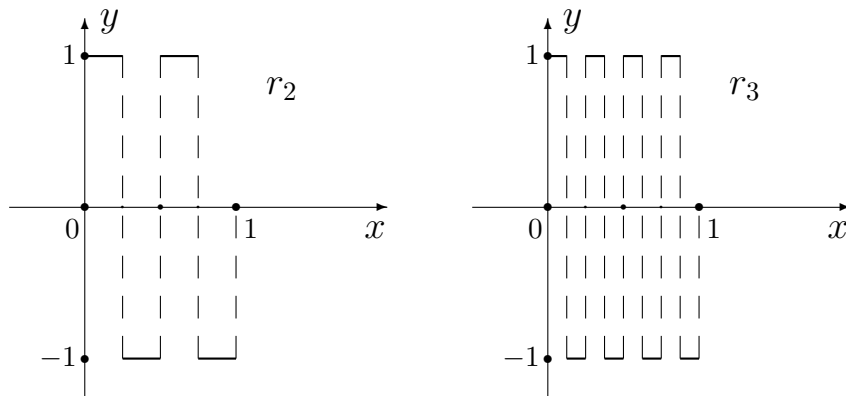
Введем сначала систему функций Радемахера по формуле

$$r_j(x) = \text{sign}(\sin(2^j \pi x)), \quad x \in [0, 1], \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

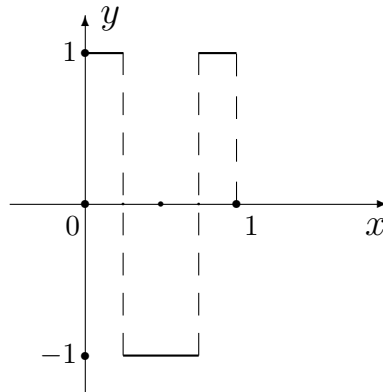
где  $x \text{ sign } x = |x|$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Ниже приведены графики четырёх первых функций Радемахера.







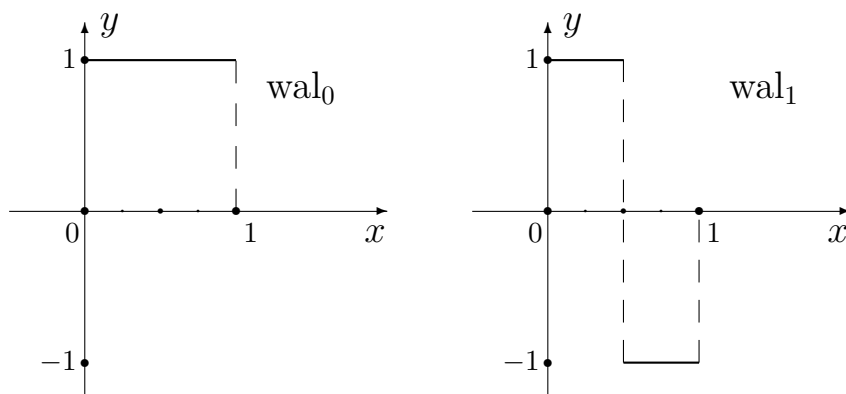
Система функций Радемахера не является базисом, так как графики всех функций, кроме нулевой, симметричны относительно точки с координатами  $(0.5; 0)$ . Поэтому любая линейная комбинация этой системы функций будет иметь график, симметричный относительно точки с координатами  $(0.5; a)$ , где  $a$  — коэффициент при  $r_0$  в линейной комбинации. Но тогда функцию с графиком,

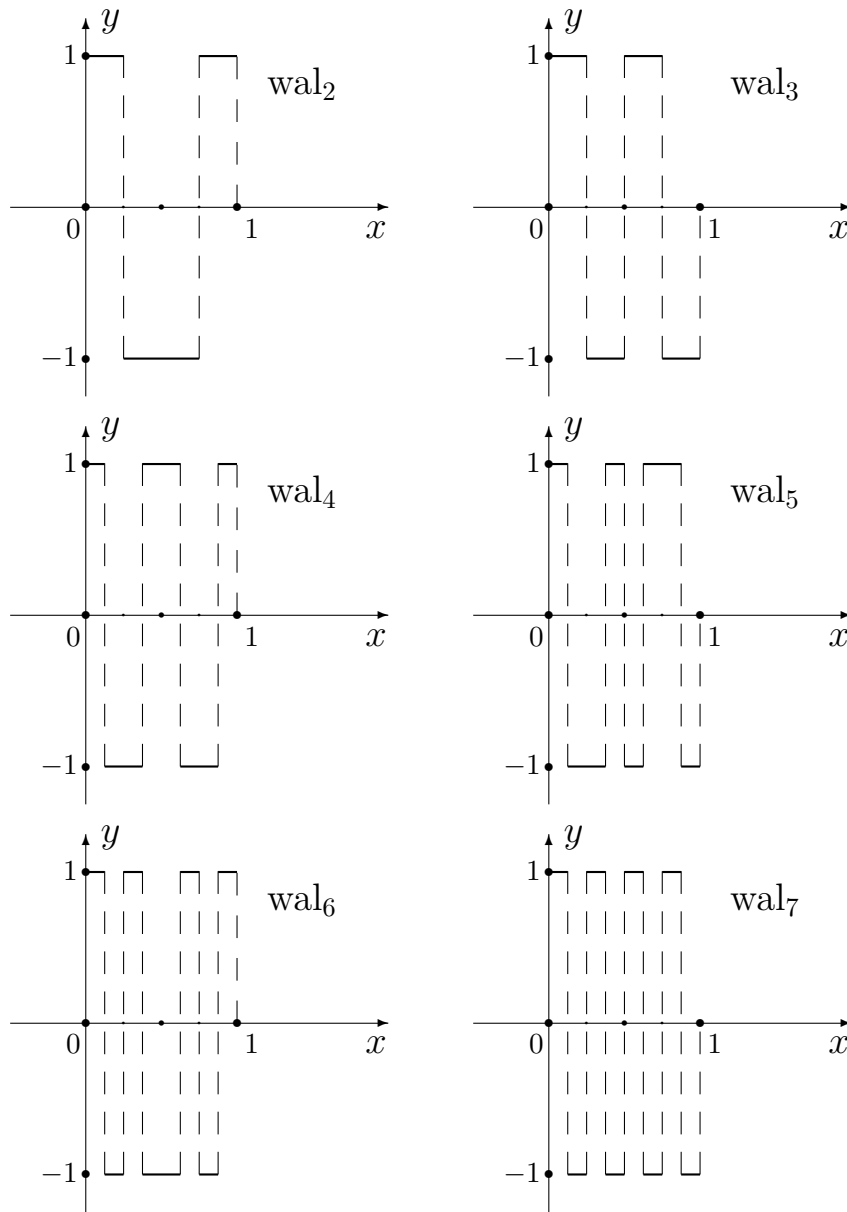


не обладающую указанным свойством, нельзя разложить в линейную комбинацию системы функций Радемахера. Следовательно, эта система не является базисом. Однако она позволяет определить систему функций Уолша:

$$\text{wal}_i(x) = \prod_{j=0}^i (r_j(x))^{i_j(G)}.$$

Приведём графики первых восьми функций системы Уолша.





Нетрудно показать, что система функций Уолша является ортонормированной в  $L_2(0; 1)$ . Более того, можно показать, что она образует ортонормированный базис в этом гильбертовом пространстве.

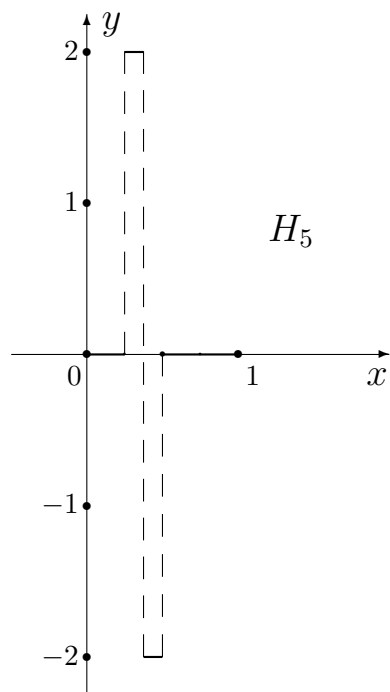
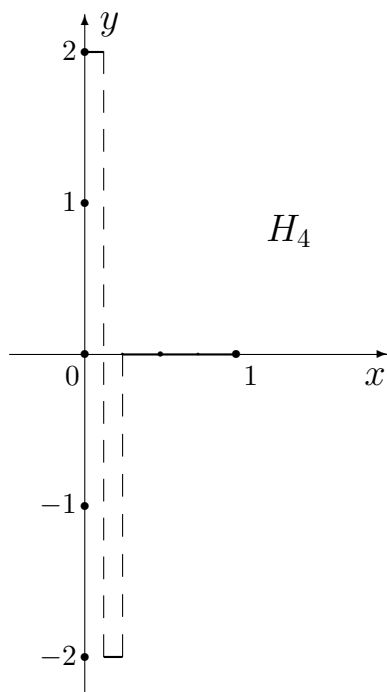
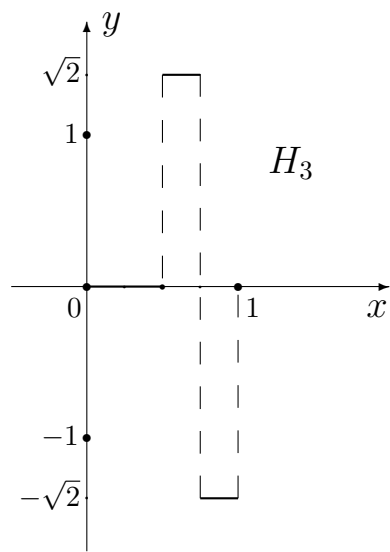
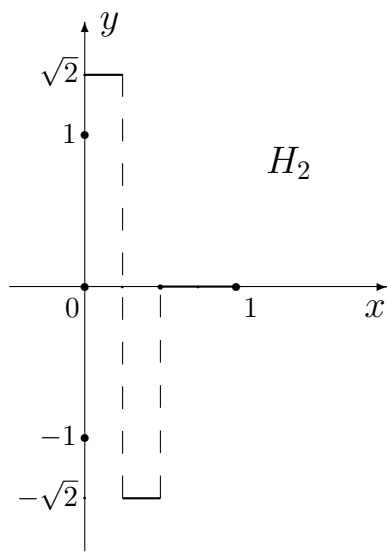
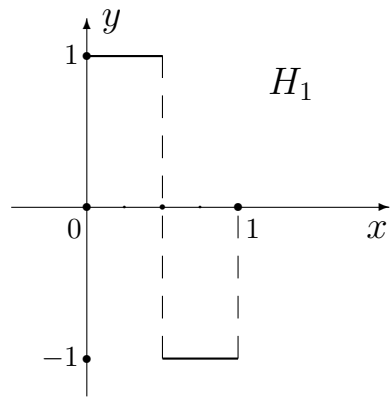
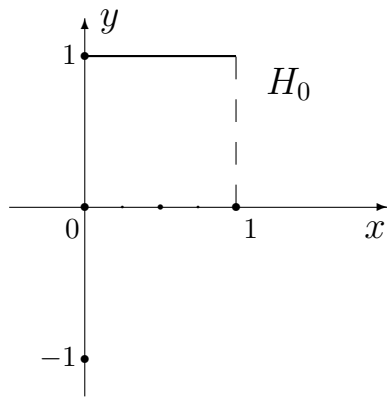
#### 5.4 Система функций Хаара

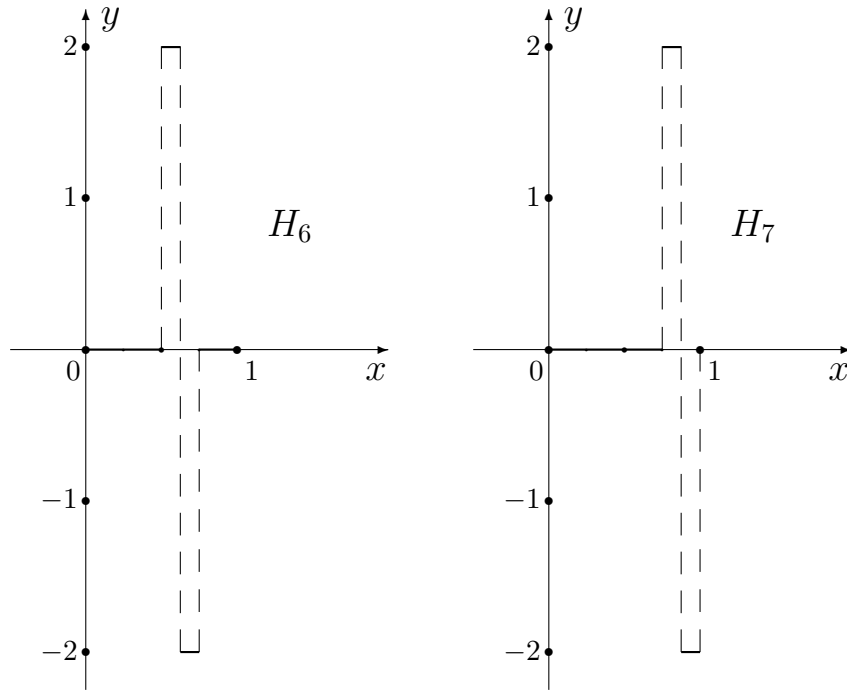
Первые две функции системы Хаара совпадают с первыми двумя функциями системы Уолша. Следующие функции системы Хаара определяются равенствами

$$H_k(t) = Haar_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}}, & \text{если } (j-1)2^{-m} \leq t \leq (j-\frac{1}{2})2^{-m}; \\ -2^{\frac{m}{2}}, & \text{если } (j-\frac{1}{2})2^{-m} \leq t \leq j2^{-m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (81)$$

где  $k = 2^m + j$ ,  $m > 0$ ,  $1 \leq j \leq 2^m$ .

Ниже приведены графики первых восьми функций системы Хаара.





Система функций Хаара является ортонормированной по тем же соображениям, что и система Уолша, и, более того, образует ортонормированный базис в  $L_2(0; 1)$ .

## 5.5 Дискретные преобразования Уолша и Хаара

Рассмотрим  $\mathbb{C}^N$  или  $\mathbb{R}^N$  для  $N = 2^k$ . Введём в этих евклидовых пространствах ортонормированные базисы Уолша и Хаара. Векторы этих базисов можно легко построить с помощью дискретизации с шагом  $\delta = 2^{-k}$  первых  $N$  функций соответствующих ортонормированных базисов в  $L_2(0; 1)$ . При этом, конечно, получаются не нормированные векторы. Но это, конечно, легко исправить, нормируя их. Рассмотрим  $N = 8$ . В этом случае (см. стр. 73) базис Уолша имеет вид:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1), & w_1 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; 1; 1; -1; -1; -1; -1), \\
 w_2 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; -1; -1; -1; -1; 1; 1), & w_3 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; -1; -1; 1; 1; -1; -1), \\
 w_4 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; -1; -1; 1; 1; -1; -1; 1), & w_5 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; -1; -1; 1; -1; 1; 1; -1), \\
 w_6 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; -1; 1; -1; -1; 1; -1; 1), & w_7 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1),
 \end{aligned}$$

Характерной и очень важной особенностью базиса Уолша состоит в том, что элементы векторов равны 1 или  $-1$ . Следствием этого обстоятельства является небольшое число арифметических операций, необходимых для

преобразования Уолша. Матрица преобразования Уолша является матрицей перехода от стандартного базиса к данному базису:

$$\text{WOLSH}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица  $\text{WOLSH}_N$  ортогональна, то обратная матрица совпадает с транспонированной. Из симметричности матрицы  $\text{WOLSH}_N$  следует, что  $\text{WOLSH}_N^{-1} = \text{WOLSH}_N$ .

Аналогично строится ортонормированный базис Хаара дискретизацией системы функций Хаара (см. стр. 75):

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1), \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}(1; 1; 1; 1; -1; -1; -1; -1),$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(1; 1; -1; -1; 0; 0; 0; 0), \quad h_3 = \frac{1}{2}(0; 0; 0; 0; 1; 1; -1; -1),$$

$$h_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0), \quad h_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 0; 1; -1; 0; 0; 0; 0),$$

$$h_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 0; 0; 0; 1; -1; 0; 0), \quad h_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; -1).$$

Матрица преобразования Хаара является матрицей перехода от стандартного базиса к последнему базису:

$$\text{HAAR}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\text{HAAR}_N$  ортогональна, поэтому обратная к ней равна транспони-

рованной:

$$\text{HAAR}_8^{-1} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 5.6 Задания

1. Найти код Грея чисел а) 24; б) 27; в) 28; г) 25.
2. Записать число в десятичной системе счисления, если код Грея равен а) 100110; б) 110001; в) 111100; г) 111000.
3. Разложить следующие функции, используя первые восемь функций базиса Уолша: а)  $\cos 2\pi t$ ; б)  $x^2$ ; в)  $\sin \pi t$ ; г)  $x$ .
3. Разложить следующие функции, используя первые восемь функций базиса Хаара: а)  $\cos 2\pi t$ ; б)  $x^2$ ; в)  $\sin \pi t$ ; г)  $x$ .

## 5.7 Тест

1. Код Грея числа 21 равен а) 11001; б) 10111; в) 11111; г) 1000; д) 11100.
2. Число с кодом Грея 11001 равно а) 22; б) 13; в) 23; г) 17; д) 18.
3. Функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in (0; \frac{3}{4}) \\ 2, & \text{если } t \in (\frac{3}{4}; \frac{7}{8}) \\ -2, & \text{если } t \in (\frac{7}{8}; 1) \end{cases}$$

принадлежит

- а) базису Уолша; б) базису Хаара; в) системе Радемахера; г) всем системам; д) никакой.

## Литература

- [1] *Голд Б., Рэйдер Ч.* Цифровая обработка сигналов. М. Сов. радио, 1973.
- [2] *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. Мир, 1978.
- [3] *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М. Мир, 1990.
- [4] *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж · Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Киев · Харьков · Минск. Издательский дом «Питер», 2003.
- [5] *Акимов П.С., Сенин А.И., Соленов В.И.* Сигналы и их обработка в информационных системах. М. Радио и связь, 1994.
- [6] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука, 1976.
- [7] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. Наука, т.3, 1970.
- [8] *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов. М. Связь, 1979.
- [9] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва · Ижевск. РХД, 2001.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Сигналы</b>	<b>2</b>
1.1	Основные определения . . . . .	2
1.2	Пространства сигналов . . . . .	8
1.3	Преобразование Фурье . . . . .	10
1.4	Ряд Фурье . . . . .	11
1.5	Дискретизация сигнала . . . . .	11
1.6	Наложение спектров (алиасинг или элайсинг) . . . . .	16
1.7	Практическое задание . . . . .	17
1.8	Тест . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Системы</b>	<b>19</b>
2.1	Линейные системы . . . . .	19
2.2	Инвариантные к сдвигу системы . . . . .	19
2.3	Цифровой фильтр . . . . .	21
2.4	Устойчивые фильтры . . . . .	25
2.5	Матрица цифрового фильтра . . . . .	26
2.6	Физически реализуемые системы . . . . .	26
2.7	Частотная характеристика системы . . . . .	28
2.8	Разностные уравнения и цифровые фильтры . . . . .	31
2.9	Z-преобразование . . . . .	35
2.10	Задания для самопроверки . . . . .	36
2.11	Тест . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Преобразование Фурье дискретных сигналов</b>	<b>39</b>
3.1	Преобразование Фурье периодических сигналов . . . . .	39
3.2	Свойства преобразования Фурье периодических сигналов . . . . .	41
3.3	Свёртка периодических последовательностей . . . . .	43
3.4	Дискретное преобразование Фурье над полем комплексных чисел . . . . .	45
3.5	Циклическая свёртка . . . . .	48
3.6	Дискретное преобразование Фурье над конечным полем . . . . .	48
3.7	Применение дискретного преобразования Фурье для приближённого вычисления интегрального преобразования Фурье . . . . .	51
3.8	Задания для самопроверки . . . . .	56
3.9	Тест . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Быстрое преобразование Фурье</b>	<b>58</b>
4.1	Общий алгоритм . . . . .	58
4.2	Вариант Кули и Тьюки . . . . .	61



4.3	Вариант Гуда и Томаса . . . . .	62
4.4	Вариант Кули и Тьюки по основанию 2 . . . . .	63
4.5	Вариант Кули и Тьюки по основанию 4 . . . . .	63
4.6	Алгоритм Рейдера . . . . .	66
4.7	Вычисление циклической свёртки с помощью ДПФ . . . . .	67
4.8	Задания . . . . .	68
4.9	Тест . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Обобщённый спектральный анализ</b>	<b>70</b>
5.1	Введение . . . . .	70
5.2	Код Грея . . . . .	70
5.3	Система функций Уолша . . . . .	72
5.4	Система функций Хаара . . . . .	74
5.5	Дискретные преобразования Уолша и Хаара . . . . .	76
5.6	Задания . . . . .	78
5.7	Тест . . . . .	78